ANALYSIS OF PARAMETER ESTIMATION METHODS FOR WEIBULL DISTRIBUTION AND INTERVAL DATA

Papanchev Toncho, Technical University – Varna, t.papanchev@tu-varna.bg

Georgiev Anton, Technical University – Varna, georgiev_an@yahoo.com

Todorinov Georgi, Technical University – Varna, g.todorinov@tu-varna.bg

Abstract: In the absence of a system for continuous monitoring the reliability data do not contain information about the exact time of occurrence of failures. Such data are interval (grouped) and censored. In these cases, problems arise in the application of mathematical apparatus. It is insufficient the accuracy of the results obtained in the evaluation of the parameters of the distribution laws of time to failure. While for censored and exact data there is a number of works and studies, the interval data are less common in literature. In this paper we tested and analyzed methods for assessing the parameters of Weibull distribution with a view to their applicability in the analysis of interval data.

Keywords:, reliability, Weibull distribution, interval data

АНАЛИЗ НА МЕТОДИ ЗА ОЦЕНКА НА ПАРАМЕТРИТЕ НА РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ НА ВЕЙБУЛ ПРИ ИНТЕРВАЛНИ ДАННИ

Тончо Папанчев, Технически Университет – Варна, t.papanchev@tu-varna.bg

Антон Георгиев, Технически Университет – Варна, georgiev_an@yahoo.com

Георги Тодоринов, Технически Университет – Варна, g.todorinov@tu-varna.bg

Абстракт: При липса на система за непрекъснат контрол данните за надеждността не съдържат информация за точния момент на възникването на отказите. Такива данни са от типа "интервални" (групирани) или "ограничени" (цензурирани). В тези случаи възникват проблеми при прилагането на математически апарат. Недостатъчна е и точността на така получените резултати при оценката на параметрите на законите на разпределение на времената до отказ. Докато за цензурираните от различен тип и точните данни има редица разработки и проучвания, в литературата интервалните данни се срещат по-рядко. В настоящата статия сме подложили на изследване и анализирали методи за оценка на параметрите на разпределението на Вейбул с оглед тяхната приложимост при анализа на интервални данни.

Ключови думи: надеждност, разпределение на Вейбул, интервални данни

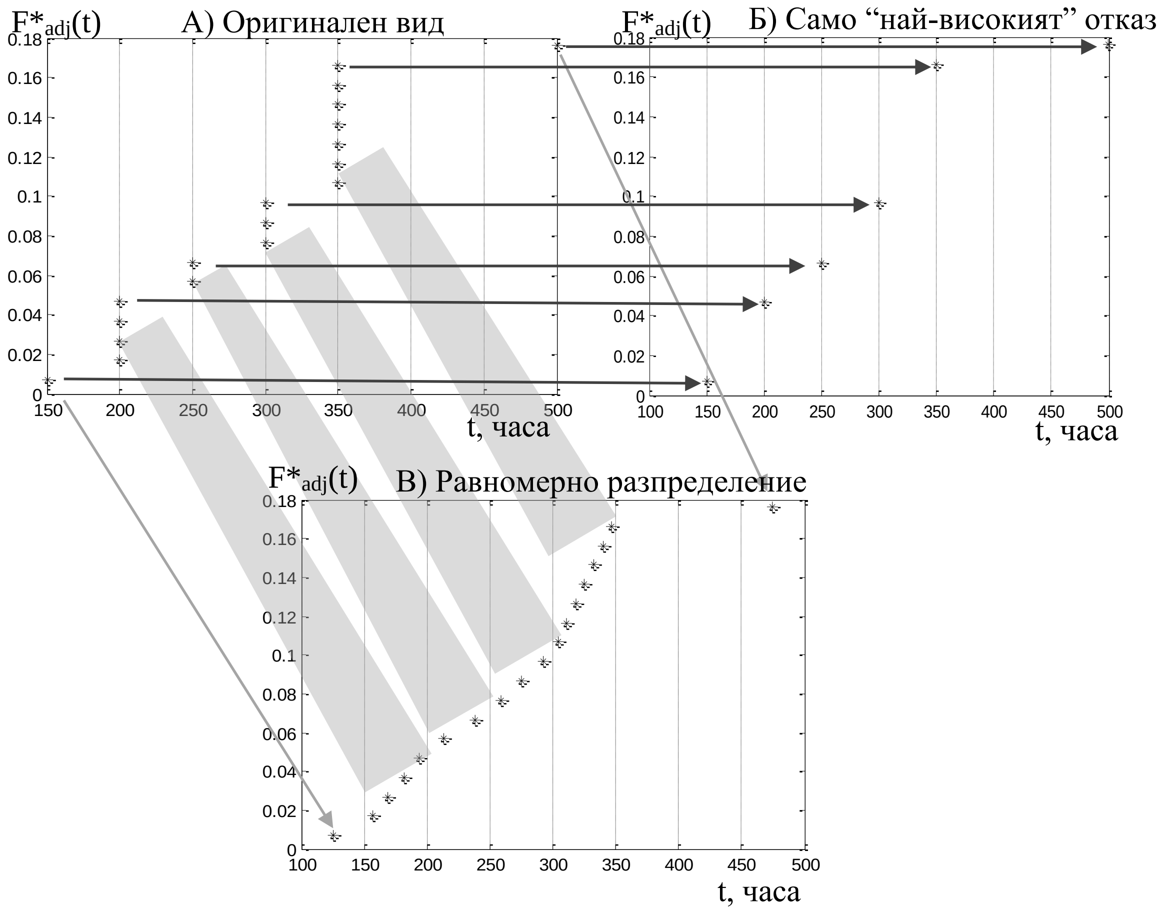
ВЪВЕДЕНИЕ

Статистическата оценка на надеждността на електронните изделия се извършва чрез анализ на събраните данни за възникнали откази в процеса на експлоатация или по време на надеждностни изпитвания. Един от факторите, влияещ върху точността на плучаваните резултати, е начинът за контрол на работоспособността и за регистрирането на моментите на възникване на отказите. При наличие на система за непрекъснат контрол върху всички подложени на изпитвания изделия, всеки отказ се регистрира в точния момент на възникване. Това повишава точността на оценката на надеждностните показатели поради избягване на времевата неопределеност на данните за отказите. При събирането на данни за надеждността в периода на експлоатация, а също и при провеждането на надеждностни изпитвания, регистрирането на точните моменти на възникване на отказите е трудно за реализиране, а понякога – невъзможно. В информацията за отказите обикновено липсва точния момент на възникване – данните са от типа “цензурирани” данни (ограничени отдясно или ограничени отляво), или са от типа “интервални” (инспекционни, групирани). Неточността може да се дължи и на обстоятелството, че състоянието на изделията се регистрира само в началото и в края на изпитванията. Допълнителни затруднения възникват и в случаите, когато изследванията и оценяването на надеждността се основават на комбинация от различни типове данни. И докато проблемите, свързани с работата с цензурираните (от различен тип) и точните данни в литературата са сравнително добре описани, а предлаганите решения, в повечето случаи, релевантни [1,2,3], то подходящи за практиката идеи за обработка на интервални данни се срещат по-рядко.

Данните, събрани при последователни периодични проверки, представляват интервални (групирани) данни. За опростяване на анализа приемаме, че всички изделия от една извадка започват изпитванията си в един и същ момент, всички изделия са работоспособни в началото на изпитванията, моментите, в които се проверява наличието на възникнал отказ, са известни и тези моменти са валидни за всички изделия от извадката.

Тогава, събраните данни съдържат информация за броя на откази във всеки интервал и броя на неотказалите изделия след приключването на теста. Проблемът е как да се оценят времената на възникване на отказите, попадащи в i-тия интервал $[t_i, t_i+\Delta t_i)$ между две последователни проверки, където Δt_i е продължителността на интервала. В своя анализ Х. Рине [4] приема, че отказите са възникнали в средата на интервала, в момента $t_i+\Delta t_i/2$, с възможна максимална грешка $\pm\Delta ti/2$. Така изводите, базирани на интервални данни, внасят допълнителна неопределеност на резултатите (в сравнение с точните данни), която е особено осезаема при малки по обем извадки и малък брой откази в рамките на един интервал.

В настоящата статия сме разгледали различни методи за оценка на параметрите на разпределението на Вейбул, с оглед тяхната приложимост при анализа на интервални данни. Някои от анализираните методи са приложими само при работа с точни и ценурирани данни. Това налага предварително преобразуване на изходните данни, което, от една страна, въвежда допълнителна неопределеност в крайните резултати, но от друга, опростява прилагания математически апарат. С достатъчна степен на достоверност могат да се използват няколко начина на преобразуване: 1. От всеки интервал се взема под внимание само отказът с най-голяма стойност на статистическата оценка на вероятността за възникване на отказ – начин, предложен и успешно използван от Шеруин [5]; 2. Равномерно разпределение на отказите в рамките на всеки интервал; 3. Нормално разпределение в рамките на всеки интервал. На фиг.1. графично са представени първия и втория начини на преобразуване.



Фиг.1. Начини на преобразуване на интервални данни в точни.

ОЦЕНКА НА ПАРАМЕТРИТЕ НА РАЗПРЕДЕЛЕНИЕТО НА ВЕЙБУЛ ЗА ИНТЕРВАЛНИ ДАННИ ПО МЕТОДА НА МАКСИМАЛНОТО ПРАВДОПОДОБИЕ

Методите, които традиционно се се използват при регресионния анализ на данни от надеждностни изпитвания, са методът *Median Rank Regression (MRR)*, представляващ оценка по метода на най-малките квадрати, и методът на максималното правдоподобие *Maximum Likelihood (ML)*. В случаите, когато се работи с интервални данни, единствено *ML* дава възможност за оценка на параметрите на разпределението на Вейбул [6], без да е необходимо да се извършва някакво преобразуване на данните. Това се постига с формулирането на функция на правдоподобие $L(t|\alpha,\beta)$ от вида [5]:

$$L(t\,|\,\alpha,\beta)=\prod_{i=1}^{k}\left(F_{iH}-F_{iL}\right)^{n_i}=\prod_{i=1}^{k}\left[\left(1-e^{-\left(\frac{t_{iH}}{\alpha}\right)^{\beta}}\right)-\left(1-e^{-\left(\frac{t_{iL}}{\alpha}\right)^{\beta}}\right)\right]^{n_i}=\prod_{i=1}^{k}\left[e^{-\left(\frac{t_{iL}}{\alpha}\right)^{\beta}}-e^{-\left(\frac{t_{iH}}{\alpha}\right)^{\beta}}\right]^{n_i}, \qquad (1)$$

където k е броят интервали на отчитане; n_i е броят регистрирани откази в i-тия интервал, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$; n е общия брой регистрирани откази; F_{1H} и F_{1L} са стойностите на вероятността за възникване на отказ в горния, респективно долния край на i-тия интервал $[ti_L,ti_H)$.

С изключение на изпитванията със стратегии за изпълнение, обвързващи краят на тестовете с отказването на всички изделия от изпитваните извадки, всички останали случаи предполагат съществуването на определен брой изделия, които са запазили своята работоспособност след завършването на изпитванията. Тези изделия обуславят наличието на данни с ограничение отдясно. За всеки тест, включването им във функцията на правдоподобие се осъществява чрез добавянето на още един интервал, $k+1$, с начало момента на завършване на теста и край, достатъчно отдалечен във времето, за да се приеме , че всички "оцелели" изделия са отказали. Началото на този интервал t_{k+1L} е моментът на прекратяване на изпитванията t_{kH}, или $t_{k+1L}=t_{kH}=T$, а за край на интервала t_{k+1H} приемаме безкрайността, $t_{k+1H}=\infty$. Тогава вероятността за отказ в края на интервала ще бъде $F_{k+1H}=1$, а функцията на правдоподобност придобива опростения вид:

$$L_{k+1}(t\mid\alpha,\beta)=\left(F_{k+1H}-F_{k+1L}\right)^{r}=\left[1-\left(1-e^{-\left(\frac{t_{k+1L}}{\alpha}\right)^{\beta}}\right)\right]^{r}=\left[e^{-\left(\frac{t_{k+1L}}{\alpha}\right)^{\beta}}\right]^{r}, \tag{2}$$

за r работоспособни изделия след края на изпитванията.

По аналогичен начин може да се разгледа първия интервал, при който началния момент има стойност $t_{1L}=0$:

$$L_{1}(t\mid\alpha,\beta)=\left(F_{1H}-F_{1L}\right)^{n_1}=\left[\left(1-e^{-\left(\frac{t_{1H}}{\alpha}\right)^{\beta}}\right)-\left(1-e^{-\left(\frac{t_{1L}}{\alpha}\right)^{\beta}}\right)\right]^{n_1}=\left[1-e^{-\left(\frac{t_{1H}}{\alpha}\right)^{\beta}}\right]^{n_1}. \tag{3}$$

Нека броят на регистрираните откази в интервалите бъдат означени с n_i, а броят на оцелелите изделия след края на теста са r, като общият брой изпитвани изделия е $r+\sum_{i=1}^{k}n_i=N$.

Тогава функцията на правдоподобие има вида:

$$L(t\mid\alpha,\beta)=\left[1-e^{-\left(\frac{t_{1H}}{\alpha}\right)^{\beta}}\right]^{n_1}.\left[e^{-\left(\frac{t_{k+1L}}{\alpha}\right)^{\beta}}\right]^{r}.\prod_{i=2}^{k}\left[e^{-\left(\frac{t_{iL}}{\alpha}\right)^{\beta}}-e^{-\left(\frac{t_{iH}}{\alpha}\right)^{\beta}}\right]^{n_i}. \tag{4}$$

За удобство при по-нататъшната математическа обработка се преминава към логаритмичната форма на функцията на правдоподобие $\pounds(t|\alpha,\beta)$:

$$\pounds(t\mid\alpha,\beta)=\ln\left(L(t\mid\alpha,\beta)\right)=n_1.\ln\left[1-e^{-\left(\frac{t_{1H}}{\alpha}\right)^{\beta}}\right]+r.\ln\left[e^{-\left(\frac{t_{k+1L}}{\alpha}\right)^{\beta}}\right]+\sum_{i=2}^{k}n_i.\ln\left[e^{-\left(\frac{t_{iL}}{\alpha}\right)^{\beta}}-e^{-\left(\frac{t_{iH}}{\alpha}\right)^{\beta}}\right]. \tag{5}$$

За оценка на стойностите на параметрите на разпределението на Вейбул се съставят частни диференциални уравнения на функцията на правдоподобие по α и β. Приравня-вайки десните части на уравненията на нула, получаваме система от две уравнения, чиито корени представляват оценки на параметрите на разпределението, получени по метода на максималното правдоподобие. След извършване на някои опростявания и преобразувания, получаваме крайния вид на уравненията:

$$\left|\begin{array}{l}\varphi_1=n_1.\dfrac{t^{\beta}_{1H}}{B_1-1}-\sum\limits_{i=2}^{k+1}n_i t^{\beta}_{iL}+\sum\limits_{i=2}^{k}n_i.\dfrac{t^{\beta}_{iH}-t^{\beta}_{iL}}{A_i-1}=0\\ \varphi_2=n_1.\dfrac{t^{\beta}_{1H}.\ln\left(\dfrac{t_{1H}}{\alpha}\right)}{B-1}-\sum\limits_{i=2}^{k+1}n_i.t^{\beta}_{iL}.\ln\left(\dfrac{t_{iL}}{\alpha}\right)+\sum\limits_{i=2}^{k}n_i.\dfrac{C_i}{A_i-1}=0\end{array}\right., \; n_{k+1}=r, \tag{6}$$

където:

$$A_i=e^{\left[\left(\frac{t_{iH}}{\alpha}\right)^{\beta}-\left(\frac{t_{iL}}{\alpha}\right)^{\beta}\right]}, \tag{7}$$

$$B_1=e^{\left(\frac{t_{1H}}{\alpha}\right)^{\beta}}, \tag{8}$$

$$C_i = \left[t_{iH}^{\beta}.\ln\left(\frac{t_{iH}}{\alpha}\right) - t_{iL}^{\beta}.\ln\left(\frac{t_{iL}}{\alpha}\right) \right]. \tag{9}$$

За решаването на получената система използваме метода на Нютон-Рафсън (*N-R*) за нелинейни системи по итеративния цикъл на оценка на параметрите α и β [7]:

$$\alpha_{i+1} = \alpha_i - \frac{\varphi_{1,i}.\frac{\partial \varphi_{2,i}}{\partial \beta} - \varphi_{2,i}.\frac{\partial \varphi_{1,i}}{\partial \beta}}{\frac{\partial \varphi_{1,i}}{\partial \alpha}.\frac{\partial \varphi_{2,i}}{\partial \beta} - \frac{\partial \varphi_{1,i}}{\partial \beta}.\frac{\partial \varphi_{2,i}}{\partial \beta}}, \quad \beta_{i+1} = \beta_i - \frac{\varphi_{2,i}.\frac{\partial \varphi_{1,i}}{\partial \alpha} - \varphi_{1,i}.\frac{\partial \varphi_{2,i}}{\partial \alpha}}{\frac{\partial \varphi_{1,i}}{\partial \alpha}.\frac{\partial \varphi_{2,i}}{\partial \beta} - \frac{\partial \varphi_{1,i}}{\partial \beta}.\frac{\partial \varphi_{2,i}}{\partial \beta}}, \tag{10}$$

където знаменателят представлява детерминантата на матрицата на Якоби за системата нелинейни уравнения $\{\varphi_1, \varphi_2\}$.

За целта извеждаме изрази за частните производни на двете функции φ_1 *и* φ_2 по двата параметъра:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} = \frac{\beta}{\alpha^{1+\beta}}.\left(n_1.B_1\left(\frac{t_{1H}^{\beta}}{B_1 - 1}\right)^2 + \sum_{i=2}^{k} n_i.A_i.\left(\frac{t_{iH}^{\beta} - t_{iL}^{\beta}}{A_i - 1}\right)^2 \right), \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \beta} &= \frac{n_1.t_{1H}^{\beta}}{B_1 - 1}.\left[\ln(t_{1H}) - \frac{\left(\frac{t_{1H}}{\alpha}\right)^{\beta}.\ln\left(\frac{t_{1H}}{\alpha}\right).B_1}{B_1 - 1} \right] - \sum_{i=2}^{k+1} n_i\, t_{iL}^{\beta}.\ln(t_{iL}) + \\ &+ \sum_{i=2}^{k} \frac{n_i}{A_i - 1}.\left[t_{iH}^{\beta}.\ln(t_{iH}) - t_{iL}^{\beta}.\ln(t_{iL}) - \frac{\left(t_{iH}^{\beta} - t_{iL}^{\beta}\right).D_i.A_i}{A_i - 1} \right] \end{aligned} \tag{12}$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha} = -\frac{1}{\alpha.}\left(\frac{n_1.t_{1H}^{\beta}}{B_1 - 1}.\left(1 - \frac{\left(\frac{t_{1H}}{\alpha}\right)^{\beta}.\ln\left(\frac{t_{1H}}{\alpha}\right).\beta.B_1}{B_1 - 1} \right) + \sum_{i=2}^{k+1} n_i\, t_{iL}^{\beta} + \sum_{i=2}^{k} \frac{n_i}{A_i - 1}.\left(t_{iL}^{\beta} - t_{iH}^{\beta} - \frac{C_i.\beta.\left(\left(\frac{t_{iL}}{\alpha}\right)^{\beta} - \left(\frac{t_{iH}}{\alpha}\right)^{\beta}\right)}{A_i - 1}.A_i \right) \right), \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \beta} &= \frac{n_1.t_{1H}^{\beta}}{B_1 - 1}.\ln\left(\frac{t_{1H}}{\alpha}\right)\left(\ln(t_{1H}) - \frac{\left(\frac{t_{1H}}{\alpha}\right)^{\beta}.\ln\left(\frac{t_{1H}}{\alpha}\right).B_1}{B_1 - 1} \right) - \sum_{i=2}^{k+1} n_i\, t_{iL}^{\beta}.\ln(t_{iL}).\ln\left(\frac{t_{1L}}{\alpha}\right) + \\ &+ \sum_{i=2}^{k} \frac{n_i}{A_i - 1}.\left[t_{iH}^{\beta}.\ln(t_{iH}).\ln\left(\frac{t_{iH}}{\alpha}\right) - t_{iL}^{\beta}.\ln(t_{iL}).\ln\left(\frac{t_{iL}}{\alpha}\right) - \frac{C_i.D_i.A_i}{A_i - 1} \right] \end{aligned}, \tag{14}$$

където

$$D_i = \left(\frac{t_{iH}}{\alpha}\right)^{\beta}.\ln\left(\frac{t_{iH}}{\alpha}\right) - \left(\frac{t_{iL}}{\alpha}\right)^{\beta}.\ln\left(\frac{t_{iL}}{\alpha}\right). \tag{15}$$

Понеже извеждането на частните производни при нелинейни функции създава затруднения, за нуждите на инженерния надеждностен анализ е извършено решение на системата уравнения (6) с представяне на частните производни по метода на секущите [7]:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha} = \frac{\varphi_i(\alpha + \delta.\alpha, \beta) - \varphi_i(\alpha, \beta)}{\delta.\alpha}, \; i=1,2, \tag{16}$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \beta} = \frac{\varphi_i(\alpha, \beta + \delta.\beta) - \varphi_i(\alpha, \beta)}{\delta.\beta}, \; i=1,2, \tag{17}$$

където δ определя стъпката на метода.

Когато събраната при изпитванията информация представлява точни и цензурирани данни за моментите на възникване на отказите, за изчисление по метода на *ML* се използвани уравненията, описани от Р. Абернети [5], за комбинация от точни и цензурирани данни:

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i^{\hat{\beta}}.\ln(t_i)}{\sum_{i=1}^{n} t_i^{\hat{\beta}}} - \frac{1}{r}.\sum_{i=1}^{r}\ln(t_i) - \frac{1}{\hat{\beta}} = 0 \ , \qquad (18)$$

$$\hat{\alpha} = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i^{\hat{\beta}}}{r}\right]^{\frac{1}{\hat{\beta}}} \ , \qquad (19)$$

По метода *N-R*, за уравнение (18), е изведена частната производната на функцията ξ относно β:

$$\frac{\partial\xi}{\partial\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i^{\hat{\beta}}.\ln(t_i)^2}{\sum_{i=1}^{n} t_i^{\hat{\beta}}} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} t_i^{\hat{\beta}}.\ln(t_i)\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} t_i^{\hat{\beta}}\right)^2} + \frac{1}{\hat{\beta}^2} \ , \qquad (20)$$

и е получена оценка за параметъра на формата β, чрез итерационната процедура:

$$\beta_{i+1} = \beta_i - \frac{\xi_i}{\frac{\partial\xi_i}{\partial\beta}} \ . \qquad (21)$$

След това от уравнение (19) се изчислява характеристичното време α.
В случая може да се опрости изчислителната процедура с прилагане на модифициран метод на секущите [7]:

$$\beta_{i+1} = \beta_i - \frac{\delta.\beta_i.\xi_i(\beta)}{\xi(\beta_i + \delta.\beta_i) - \xi(\beta_i)} \ . \qquad (22)$$

СИМУЛАЦИОНЕН ЕКСПЕРИМЕНТ ЗА ИЗСЛЕДВАНЕ И АНАЛИЗ НА ПРИЛОЖИМОСТТА НА РАЗГЛЕЖДАНИТЕ МЕТОДИ ЗА КОЛИЧЕСТВЕНА ОЦЕНКА ПРИ ИНТЕРВАЛНИ ДАННИ.

За целта на Вейбуловия надеждностен анализ, разработихме пакет от изчислителни модули в среда на *MATLAB*, който позволява генерирането на псевдослучайни реализации по закона на Вейбул на данни от типа точни, ограничени отдясно или интервални, подготовка на данните за представянето им в графичен вид, получаване на оценки на параметрите на надеждностното разпределение по няколко метода и допълнителна статистическа информация.
С помощта на разработения изчислителен пакет сме изследвали методите *ML* и *MRR*, при представяне на интервалните данни в оригинален вид или преобразувани в точни, и прилагане на различен начин на изчисление:
1) *ML* за интервални и ограничени отдясно данни с изчисление по метода Нютон-Рафсън (*N-R*);
2) *ML* за интервални и ограничени отдясно данни с изчисление по модифициран метод на секущите [7];
3) *ML* за точни и ограничени отдясно данни с изчисление по метода *N-R*;

4) *ML* за точни и ограничени отдясно данни с изчисление по модифициран метод на секущите;
5) *MRR* с анализ на данните по отношение на *X (XonY)*, където $X = \ln(t)$ и $Y = \ln(-\ln(1-F(t)))$ са членове на линейното преобразуване на закона на Вейбул спрямо *X*:

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}} \rightarrow X = \frac{1}{\beta}.Y + \ln(\alpha); \tag{27}$$

6) *MRR* с анализ на данните по отношение на *Y (Y onX)*:

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}} \rightarrow Y = \beta.X - \beta.\ln(\alpha); \tag{28}$$

7) *ML* за интервални и ограничени отдясно данни с изместване половин интервал наляво, изчисление по метода *N-R*;
8) *ML* за интервални и ограничени отдясно данни с с изместване половин интервал наляво, изчисление по модифициран метод на секущите.
Целта на извършения експеримент бе да бъде оценена ефективността на методите при различна интерпретация на интервалните данни и при различни изчислителни методи. Такъв анализ дава основа за избор на най-подходящия по изходни резултати и математически апарат метод за различните случаи, а също и като комбинация за по-голяма достоверност.
При симулациите приемаме, че всички изделия, за които имаме ограничени отдясно данни, са останали в тестовата извадка до края на изпитванията. За ограничаване обема на изходните резултати и с цел по-голяма обобщеност на изводите, без да губим от точността на крайните резултати, приемаме, че всички симулирани реализации имат еднакви параметри на закона на разпределението.
Параметрите на генерираните псевдослучайни реализации са в следните граници:
$(\{\alpha, \beta\})$=({500,1.2},{500,3},{1000,2},{1000,5}); n=2000; m={5,15,30,50,100}.
Освен в автентичната си форма на интервални данни, събраната при изпитванията информация е преобразувана и използвана в следните вариации:
-всички откази се приемат разположени в края на интервала;
-всички откази са разположени в средата на интервала;
-отказите в интервала са разпределени равномерно в интервала и така получените времена се приемат за точните времена на отказите.
С така подготвените данни са получени оценки на параметрите α и β по различните методи. След направен статистически анализ, методите са оценени по следните показатели:
а) дял коректни резултати – резултати със стойности на параметрите, които могат да представляват правилна оценка;
б) дял грешни резултати – резултати без физически смисъл или нереално далече от очакваните резултати;
в) средна стойност и стандартно отклонение на стойностите на параметрите;
г) дял грешни резултати в зависимост от броя регистрирани откази;
д) дял коректни резултати и средна стойност на параметрите в зависимост от броя регистрирани откази;
е) дял коректни резултати в рамките на ±1%, ±5%, ±10%, ±20% от реалната стойност поотделно за параметрите и като двойка:
ж) големина на доверителните интервали.

ИЗВОДИ

Направеният анализ потвърждава изводите, формулирани от Абернети [5], Миикър [8] и др., за приложимостта и спецификите на различните методи. Установили сме, че някои от аспектите на изследването не са били обект на проучване от научната общност. По-съществените изводи, които сме формулирали при анализирането на констатираните в статията специфични казуси, могат да бъдат синтезирани във вида:

1. Констатирали сме, че може да се постигне съществено повишаване на достоверността и точността на оценяване на параметрите на разпределението, като за преобладаващата част от резултатите се достига до 10% отклонение (за преобладаващата част от резултатите). Това значимо подобряване на резултатите сме постигнали чрез използването на метода *ML* за интервални данни с изместване на времеинтервалите с половин интервал наляво, и изчисляване по метода *N-R*. Констатирано е обаче, че едновременно с това се разширяват доверителните интервали на характеристичното време α с до 10%.
2. По метода *ML* се получава по-точна оценка за параметъра на формата β, в сравнение с точността на оценката за α, особено за изпитвания с малък брой регистрирани откази. В такива случаи трябва да се използват методи и подходи, в които, по аналогия с Бейсовския подход, оценките на параметрите на разпределенията се изчисляват чрез обединяване на получените данни от изпитванията и наличните априорни знания за надеждността на изделия с подобни функции, конструкция и свойства.
3. Сравняването на резултатите, получавани по метода *ML*, в съчетание с метода *N-R* или метода на секущите, при изчисляването на резултатите, дават преимущество на метода *N-R* по отношение на точността. Важно е да се отбележи, че разликите не са особено големи, така че при необходимост от релевантен за практическо приложение математически апарат е допустимо прилагането на метода на секущите.

References

[1] ZHOU L., A Simple Censored Median Regression Estimator, Statistica Sinica 16(2006), ISSN 1043-1058, http://www3.stat.sinica.edu.tw/statistica/

[2] PASHA G.R., M. KHAN, A. PASHA. Empirical Analysis of the Weibull Distribution for Failure Data, ISSN 1684 – 8403, Journal of Statistics, Vol: 13, No.1 (2006)

[3] Тихов М.С., В. Агеев, Т. Бородина. Оценивание параметров распределения Вейбулла по случайно цензурированным выборкам, Математическое моделирование. Оптимальное управление, Вестник нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского, 2010, №4 (1), с.141-145

[4] RINNE H., The Weibull Distribution A Handbook, CRC Press, USA, 2010, ISBN 978-1-4200-8743-7

[5] ABERNETHY R., The New Weibull Handbook, 4th edition, Florida, USA, 2000, ISBN 0-9653062-1-6

[6] NELSON W., Accelerating Testing, Statistical Models, Test Plans, and Data Analysis, New Jersey, John Wiley and Sons, Inc., 1990

[7] CHAPRA S., Applied Numerical Methods with MATLAB for Engineers and Scientists, 3rd Edition, McGraw-Hill, NY, USA, 2012, ISBN 978-0-07-340110-2

[8] MEEKER W., G. SAKARAKIS, A. GEROKOSTOPOULOS. More Pitfalls of Accelerated Tests, Journal of Quality Technology, Volume 25, Issue 3 (July 2013), pages 213-222