Еволюция на съвременната теория за инвестиционни портфейли-част II

Ангел Марчев, мл.
УНСС, Катедра "Управление"

3.3. Модел с нулев бета коефициент

В разгледания по-рано [16] Модел за оценка на капиталовите активи са направени редица предварителни допускания. Повечето от тях могат да бъдат определени като основателни. Според Фишер Блек [18][15,с.249], обаче съществуването на пазарен портфейл и безрисков актив[1] е доста спорно. Затова той отхвърля предположението, че инвеститорът може да даде или да получи кредит на безрискова норма и го замен я с много по-реалистичното допускане, че са възможни неограничен брой къси продажби [18], [19]. Останалите допускания на Модела за оценка на капиталови активи (МОКА) остават да важат и за Модела с нулев бета коефициент. След като няма безрисково даване или получаване на кредит, пазарният портфейл вече не е общ за всички «инвеститори» и те могат да избират рискови портфейли от целия набор от границата на оптималните портфейли, според това какъв риск са готови да поемат.

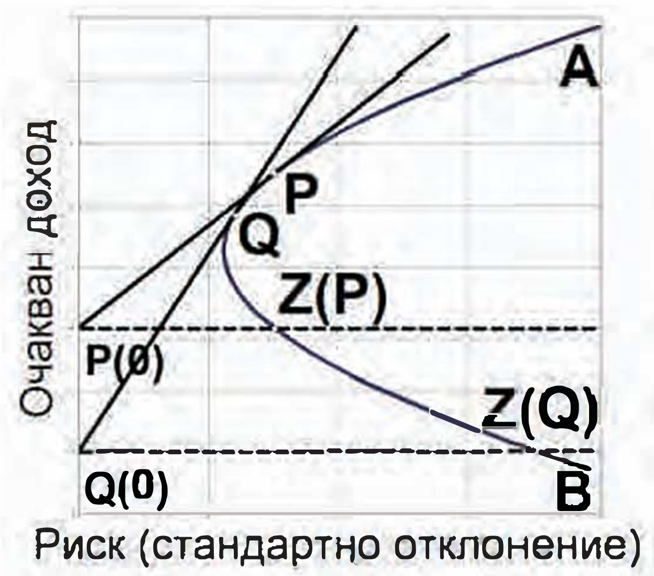
При липса на безрисков актив, моделът на Блек се основава на следните три свойства свързани с оптималността на взаимовръзката между очаквана доходност и очакваната дисперсия или средно отклонение (като измерител за очаквания риск).

1)Всеки портфейл, образуван от комбинирането на оптимални портфейли, съответно също е разположен върху границата на оптималните портфейли.

2)На всеки портфейл P от границата на оптимални портфейли съответства друг уникален „сателитен" портфейл Z(P), разположен върху долната[2] нерационална част от границата (*Фигура 6*). Портфейл P не корелира с портфейл Z(P) /виж поясненията по-долу/, така сателитният портфейл се нарича портфейл с нулев бета коефициент.

3)Очакваната доходност на всеки инструмент може да се изрази като чрез линейна функция на очакваната доходност на всеки два портфейла, разположени на оптималната граница.

Фигура 6. Портфейли с нулев бета



Освен посочените три свойства се приемат за валидни и основните допускания на МОКА относно рационалните инвеститори:

- Според допускането за хомогенни очаквания на инвеститорите, всички те използват едни и същи входни данни и да изчислят една и съща граница с минимална дисперсия.
- Всеки инвеститор инвестира в оптимален портфейл според своята степен на

[1] Наличието на безрисков актив в смисъла на Модела за оценка на капиталовите активи означава, че инвеститора може да дава на заем и да получава на заем неограничени суми.

[2] Границата на оптималните портфейли следва да се разглежда като съставена от две части: (горна) част, над абсолютния минимум за риск, съдържаща оптимални портфейли, избрани от рационалния инвеститор и (долна) част, съдържаща нерационални портфейли, неоптимална част [14]

избягване на риска, т.е. той инвестира в този оптимален портфейл, който е определен от допирането на оптималната граница със съответно най-високо разположената му крива на безразличие.

- Всеки инвеститор иска да задържи портфейл с най-високата очаквана доходност.

Инвеститорите могат да държат различни от пазарния портфейл рискови портфейли, но всички тези портфейли лежат на оптималната граница. Всеки един от тях се характеризира със съответна очаквана доходност и риск (стандартно отклонение).

При модела с нулев бета коефициент обаче липсва безрисков актив и следователно аргументите, които водят до линията на капиталовия пазар CML [виж 24], са невалидни. А именно това, че тя е допирателната минаваща през безрисковата норма към оптималната граница.

В случая различните предпочитания предполагат различен избор п о горната част от границата на оптималните портфейлите. Следователно, като основна разлика със стандартния МОКА, може да се посочи: изборът на различни портфейли от рискови активи за всеки инвеститор, като всеки портфейл притежава своите характерни риск и доход.

Пазарният портфейл, който всъщност е обобщение на портфейл ите на всички инвеститори, е комбинация от оптимални портфейли и според първото свойство самият той е оптимален портфейл.

На Фигура 6 е изобразена границата на оптимални портфейли АВ. След като не съществува безрисков актив, то тя включва всички рационални и възможни портфейли. Изобразени са два портфейла (т.Р и т. Q), които могат да бъдат избрани от инвеститори с различни предпочитания към риск.

Ако през точки Р или Q се прекарат допирателни към параболата АВ (подобно на построението за пазарния портфейл в Модел за оценка на капиталови активи), то пресечните точки /съответно Р(0) и Q(0)/на допирателните с ординатата ще показват ниво на доход с нулева ковариация за съответния портфейл. На такова ниво отговаря точно един уникален портфейл с нулева ковариация (и съответно нулев бета коефициент) за всеки портфейл от горната част на границата. Например Z(P) с портфейл с нулев бета коефициент на спрямо портфейл Р. Така очакваната доходност на всеки инструмент i може да се изрази чрез (21).

(21)
$$= \quad (\ ) + \frac{(\ _{i},\ _{P})}{VAR\, R_P}\Big[\qquad - \qquad (\ )\Big]$$

$E(R_i)-$

$(\ _{P})-$

$(\ _{Z(P)})-$

$(\ _{i},\ _{P})-$

$(\ _{P})$

Като заместител на безрисковия актив Блек предлага използването на портфейл с нулев бета „Z” и доходност - R_z, чиято ковариация с инвеститорския портфейл е нулева - $\mathrm{cov}(R_{Z(P)}, R_P) = 0$.

За нагледност (21) може да се запише и така:

(22) β

Уравнение (22) е същото като при класическия МОКА, с единствената разлика, че безрисковата доходност R_f е заменена с очакваната доходност на сателитния портфейл $E(R_z)$. Следователно класическия МОКА е частен случай на модела с нулев бета коефициент там където доходността на портфейл с нулев бета е равна на безрисковата норма[3]. До основното уравнение на МОКА може да се достигне и без строгото допускане за наличието на безрисковия актив.

При наличие на пазарно равновесие и съвършено конкурентен пазар, всички инвестиции се съсредоточават в пазарния портфейл. Но някои инвеститори са готови да поемат повече риск от този, който им носи пазарния портфейл. Те ще могат да инвестират повече от 100% от наличния си капитал в пазарния портфейл, като заемат къси позиции относно портфейла с нулев бета. Други инвеститори поемат по-малко риск от този на пазарния портфейл. Те ще постигат това, заемайки дълги позиции в портфейла с нулев бета, т.е. съставяйки комбиниран портфейл,

[3] Сравнението между SML при стандартния МОКА и МОКА с нулев бета е посочено в [19]

включващ пазарния портфейл и неговия сателитен портфейл нулев бета [12, с. 9].

Линията SML при МОКА с нулев бета е подобна на тази при класическия МОКА, с изключение на безрисковата норма - R_f , която е заменена от доходността на портфейла с нулев бета - R_z. Така при Модела с нулев бета има същото линейно отношение като при класическия МОКА и измерител на систематичния риск е също коефициентът бета.

Като недостатък на този модел може се посочи, че съставянето на портфейл с нулев бета се осланя на предположението, че са възможни неограничен брой къси продажби на рискови ценни книжа. В действителност, късите продажби са ограничени и това предизвиква трудности при разглеждането на този модел.

Така например в България, съгласно действащата към момента, нормативна база на Комисията за финансов надзор, са наложени големи ограничения върху търговията с къси продажби.

4. Арбитражна теория

4.1. Арбитражен модел за оценка на активите

МОКА е равновесен модел, който описва защо различните инвестиционни инструменти имат различна доходност, по-точно те имат различни очаквани доходности, защото имат различни бета коефициенти. Все пак съществува и друг модел за оценка на инвестициите, който първоначално е предложен от Рос (1976) [13]. Познат е под името "Arbitrage pricing theory" - (АРТ) или Арбитражна теория за оценка на активите (АМОА) и се предполага, че е с обобщаващ от МОКА[4].

АМОА започва със слабото допускане, че доходността на инвестициите е свързана с неопределен брой фактори. АМОА не предполага съществуването на пазарен портфейл (като единствен фактор в МОКА), който съдържа всички рискови инвестиции и който да е оптимален по смисъла на Марковиц. Други допускания на АМОА са тези, че инвеститорите винаги предпочитат повечето богатство пред по-малкото богатство и всички пазари са перфектно конкурентни.

Според АМОА доходността на инвестициите се определя от процес подобен на този при факторните модели. В настоящата разработка първоначално ще бъде разгледан по-опростеният вариант с наличието само на един систематичен фактор, който влияе върху доходността на инвестициите (23).

$$R_i = A_i + \beta_i F_1 + \varepsilon_i \qquad (23)$$

където:

R_i *- норма на доходност на инвестиционен инструмент „i"*

A_i *- очаквана доходност на инвестиционен инструмент „i" при нулева стойност на всички фактори,*

β_i *- чувствителност на доходността на инвестиционен инструмент „i" по отношение на фактора*

F_1 *- стойност на фактора,*

ε_i *- случайна величина (влияние на необяснени в модела фактори)*

Основната идея на АМОА е, че съществуват такива портфейли, които могат да бъдат подбрани измежду разглежданата група от инвестиции, чрез които е възможно да се увеличи доходността на текущия портфейл, без да се увеличи неговия риск. Тези портфейли се наричат арбитражни портфейли.

Арбитражният портфейл отговаря на следните условия: това е портфейл който не изисква от инвеститора използването на допълнителни парични средства. За да се състави такъв портфейл, трябва да е възможно да се продаде късо поне един инвестиционен инструмент и постъпленията от това да се използват за закупуването на един или повече инвестиции. Ако „ w_i" показва промяната в притежанието на инвестиционен инструмент „*i*" (тежестта на инвестиционния инструмент в арбитражния портфейл), следователно това изискване и доходността на портфейла, при наличието на „*n*" инструмента в арбитражния портфейл, може да бъде записано по начин показан в уравнение(24).

[4] В смисъла на по-малкия брой необходими допускания

(24)
$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 0$$
$$R_p = \sum_{i=1}^{n} w_i R_i = \sum_{i=1}^{n} w_i A_i + \sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i F_1 + \sum_{i=1}^{n} w_i \varepsilon_i$$

За да се получи безрисков арбитражен портфейл е необходимо да се елиминират и двата вида риск - диверсифицируем (несистематичен) и недиверсифицируем (систематичен). Това може да се получи при изпълнение на следните условия: Трябва да се избират променливи тегла „ w_i ” такива, че за всеки фактор, претеглената стойност на систематичните рискови компоненти „β_i” е нула, т.е. $\sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i = 0$. Диверсифициране чрез голям брой инвестиции, води до пренебрежимо малко ниво на несистематичния риск, т.е. $\sum_{i=1}^{n} w_i \varepsilon_i \approx 0$ Имайки предвид, че разглежданият модел е факторен, аргументите, които водят до елиминиране на несистематичния риск, са същите като при факторните модели. Комбинациите от стойности „ w_i” трябва да са такива, че очакваната доходност да е положителна $\sum_{i=1}^{n} w_i A_i > 0$

Пример за благоприятна възможност за арбитраж възниква, когато е нарушен законът за единната цена, който гласи, че два еднакви инструмента не могат да се продават на различна цена. Когато един инвестиционен инструмент се търгува по различни цени на два пазара, едновременна сделка и на двата пазара, т.е. продажба на късо на пазара с по-високата цена и покупка на пазара с по-ниската цена, ще доведе до сигурна печалба, без да е направена никаква инвестиция.

Най-важното качество на безрисковия арбитражен портфейл е това, че всеки инвеститор, независимо от степента си на избягване на риска и богатството си, иска да заеме безкрайна позиция в него, като по този начин ще увеличи печалбата си. Но покупката на едни и продажбата на други инвестиции съответно води до повишение и намаление на техните пазарни цени, като това се отразява и на техните очаквани доходности. Този процес продължава, докато всички арбитражни възможности са елиминирани, т.е. вече не може да се достигне печалба, или докато всички инвестиции при дадено ниво на риск се продават по цени, които ще осигуряват една и съща доходност.

Поради това, че случайната величина „ ε_i ” е независима, включването на голям брой инвестиции в портфейла гарантира, че средно претеглено за повечето случаи тя се доближава до нула. С други думи, диверсификацията елиминира случайната величина, т.е. несистематичния риск. Но при липса на арбитражни възможности, елиминирането на систематичния риск е невъзможно, а оттам и зависимостта между чувствителността (като измерител на този риск) и очакваната доходност е линейна и може да се отрази чрез уравнение (25) [2, с. 262].

(25)
$$E(R_i) = \lambda_0 + \lambda_1 \beta_i$$

Това уравнение за оценка на инвестициите на АМОА представя един опростен модел, където доходността е определена на база един фактор и „ λ_0” и „λ_1” са константи.

За да се определи какво по-точно представляват константата „ λ_0” и „ λ_1 ” в уравнението на АМОА (25), трябва да се предположи, че съществува безрисков инвестиционен инструмент, чиято доходност е константа. Следователно този инвестиционен инструмент няма да има чувствителност към фактора. От разглежданото уравнение е видно, че очакваната доходност за всеки инвестиционен инструмент, за който чувствителността „ β_i” е нула има следния вид: $E(R_i) = \lambda_0$.

В този случай с безрисков инвестиционен инструмент също е известно и това, че очакваната доходност е равна на безрисковата норма - $E(R_i) = R_f$, което предполага, че $R_f = \lambda_0$. От тук стойността на „ λ_0” *в уравнение (25) трябва да бъде заместена с* R_f и следователно уравнението за очаквана доходност на един инвестиционен инструмент придобива нов вид (26).

(26)
$$E(R_i) = R_f + \lambda_1 \beta_i$$

По отношение на „λ_1", *нейната стойност може да се определи, като се отчете идеално-факторен портфейл (pure factor portfolio), отбелязан с „p*," който има единична чувствителност към разглеждания фактор, т.е.* $\beta_{p*}=1$. Ако имаше други фактори, такъв портфейл нямаше да има чувствителност към тях. Според уравнение (26), такъв портфейл има следната очаквана доходност (27).

(27)
$$E(R_{p*}) = R_f + \lambda_1$$
или което е същото:
$$E(R_{p*}) - R_f = \lambda_1$$

Разглеждайки уравнение (27) се стига до извода, че „ λ_1 " е допълнителната очаквана доходност (очакваната доходност над безрисковата) на портфейла, който има единична чувствителност към фактора, т.е. това е факторната рискова премия. Нека с „δ_1" (делта) се означи очакваната доходност на портфейл, който има единична чувствителност към фактора - $\delta_1 = E(R_{p*})$, следователно уравнение (27) прераства в (28).

(28)
$$\delta_1 - R_f = \lambda_1$$

Като се сравни уравнение (28) и уравнение (23) се установява, че доходността на инструмента *„i"* в АМОА се определя от безрисковата норма и рисковата премия на портфейл с единична чувствителност към фактора, съобразена със съответния бета коефициент (чувствителност) на разглеждания инвестиционен инструмент (29) [2, с. 266].

(29)
$$E(R_i) = R_f + (\delta_1 - R_f)\beta_i$$

Уравнение (29) много наподобява това на базисното уравнение на МОКА. Разликата е в това, че в АМОА анализа не води до определянето на пазарен портфейл, в който всички инвеститори влагат част от капитала си.

4.2. Многофакторен АМОА.

Многофакторният модел на АМОА обобщава еднофакторния, като взема предвид възможността за няколко източника на систематичен риск, т.е. няколко фактора. В случай, при който се разглежда наличието на повече от един (*„k"*) фактори ($F_1, F_2, F_3, \ldots, F_k$), всеки инвестиционен инструмент ще има *„k"* чувствителности (β_{i1} , β_{i2} ,..., β_{ik}) във факторен модел (30).

(30)
$$R_i = A_i + \beta_i F + \quad + \beta_{ik} F_k + \varepsilon_i$$

На свой ред това предполага, че очакваната доходност на съответните инвестиции може да се представи чрез уравнение (2.39).

(31)
$$E \; R_i \; = \lambda \; + \lambda \, \beta_i \; + \quad + \lambda_k \beta_{ik}$$

Както и при еднофакторния модел това е линейно отношение. Разширяването на уравнението за оценка на инвестициите на АМОА към сегашната ситуация е относително просто. Както и преди „ λ_0 " е равна на безрисковата стойност. Всяка стойност на „ δ_k" представлява очакваната доходност на портфейл, който има единична чувствителност към съответния фактор *„k"* и нулева чувствителност към всички други фактори. В резултат на това уравнение (31) се трансформира в (32).

(32)
$$\qquad 1 \qquad\qquad 1$$

В АМОА остават необяснени броя и същността на факторите, влияещи върху оценката на инвестициите. Като кандидати за фактори в АМОА могат да се разглеждат промените в лихвения процент, БНП, неочакваните промени в инфлацията, промените в доходността на основните пазарни индекси и др. В действителност не е необходимо да се определят с точност всички възможни рискови икономически фактори, влияещи върху доходността, а трябва да се намерят подходящи групи от показатели, които заедно са техен добър заместител. В литературата се срещат различни опити за идентифициране на тези обобщаващи фактори. В резултат на изследванията си Чен, Рол и Рос [11] определят четири фактора, които в голяма степен отразяват доходността на инвестициите:

1. Промените в инфлацията (очаквана и неочаквана)

2. Разликата между дългосрочните фирмени облигации и дългосрочните държавни облигации.

3. Разликата между краткосрочен и дългосрочен лихвен процент.

4. Промените в индустриалното производство

Разбира се, трудно е да се каже, че това са най-точните и правилни обобщаващи фактори. С практическото приложение на АМОА се появяват и други подобни комбинации. Всички комплекти от фактори имат някои общи характеристики: Първо те съдържат индикатори за общата икономическа активност; Второ те включват инфлацията; Трето те съдържат някакъв вид стойност на лихвения фактор.

4.3. Синтез на АМОА и МОКА.

За разлика от АМОА, МОКА не предполага, че доходността се описва чрез факторен модел. Това обаче не означава, че МОКА е несъстоятелна при такова допускане. В същност възможно е да има случай, при който доходността се описва чрез факторен модел, но и останалите допускания на АМОА са в сила, като в същото време всички допускания на МОКА също са в сила. За да се сравнят двата модела и като се разграничи възможността факторите в АМОА да се различават от пазарния портфейл, ще трябва да се обозначи чувствителността на актива *„i”* към пазарния портфейл в МОКА с „β_i^*”

Еднофкторни модели и пазарен портфейл

Интересен за разглеждане е случаят, при който доходността на активите се описва чрез еднофакторен модел и този фактор е пазарният портфейл. В такава ситуация „δ_1” ще съответства на очакваната доходност на пазарния портфейл и „ β_i ” ще представлява „ β_i^*” на актива *„i”*, отнасящ се за пазарния портфейл. В този случай сравнявайки уравнение (29) и (20) [16, с. 48] следва, че МОКА е в сила [2, с. 267].

Ако доходностите са описани чрез еднофакторен модел и този фактор не е пазарният портфейл, то *„ δ_1” съответства на очакваната доходност от портфейла с единична чувствителност към фактора, а „β_i” представлява чувствителността на актива „i”, отнасяща се към разглеждания фактор. Ако МОКА също е състоятелен, тогава очакваната доходност се свързва едновременно с бета на пазарния портфейл - „β_i^*”* на активите и техните бета „β_i” свързани с разглеждания фактор (33)

(33)
$$E(R_i) = R_f + (E(R_M) - R_f)\beta_i^*$$
$$E(R_i) = R_f + (\delta_1 - R_f)\beta_i$$

Коефициентите „β_i^*” и „β_i”

Очакваната доходност е линейно свързана едновременно към бета на пазарния портфейл и бета на разглеждания фактор. Бета коефициентите са обвързани по между си по начин показан в (34).

(34)
$$_i \qquad \frac{F \quad R_M}{_M} \qquad _i$$

(F_1, R_M) *- ковариация между фактора и пазарния портфейл*

σ_M^2 *- дисперсията на пазарния портфейл*

Тъй като отношението $\frac{Cov(F_1, R_M)}{\sigma_M^2}$ е константа и не се променя за различните активи, комбинирайки уравнение (33) и (34) се стига до уравнение (35).

(35)
$$E(R_i) = R_f + (E(R_M) - R_f)\frac{Cov(F_1, R_M)}{\sigma_M^2}\beta_i$$

Сравнявайки това уравнение с (27) и при условие, че едновременно и АМОА и МОКА са състоятелни се стига до (36).

(36)
$$\lambda_1 = (E(R_M) - R_f)\frac{Cov(F_1, R_M)}{\sigma_M^2}$$

От тук „ λ_1 ” ще има положителна стойност, ако факторът е положително корелиран с доходността на пазарния портфейл. Ако обаче факторът е отрицателно корелиран с доходността на пазарния портфейл, тогава стойността на „ λ_1” ще бъде отрицателна.

Сам по себе си АМОА не казва нищо за размера на премията на рисковия фактор „ λ_1”. Обаче, ако МОКА също е състоятелен, могат да се дадат някои насоки. Те се определят от уравнение (36). Т.е., ако факторът и пазарният портфейл са с положителна корелация, т.е.

$Cov(F_1, R_M) > 0$, и тъй като σ_M^2 и $(E(R_M) - R_f)$ също са положителни, следователно цялата дясна част на уравнението е положителна, а от там и „ λ_1” също е положителна. Още повече, разглеждайки уравнение (27), колкото по висока е стойността на „ β_i”, толкова по-висока ще е очакваната доходност от актива. В обобщение на това може да се каже, че ако факторът е положително корелиран с пазарния портфейл, тогава очакваната доходност от актива ще е положителна линейна функция от чувствителността на актива към фактора [2, с. 268].

Горните разсъждения и формули могат да се приложат и за многофакторен модел. Тогава :

(37) $$_i \quad \frac{\quad _M}{_M} \quad _i \quad \frac{F_k \quad R_M}{_M} \quad _{ik}$$

(38) $$_k \quad (\quad (\quad _M) \quad _f) \frac{(F_k, R_M)}{{}^2_M}$$

Като основно предимство на АМОА може да се изтъкне това, че този модел не е толкова рестриктивен като МОКА, в изискванията си за индивидуалните портфейли. Освен това е по-малко рестриктивен по отношение на информационната структура която се допуска.

АМОА изисква инвеститорите да възприемат източника на риск и да могат правилно и логично да определят бета коефициентите. В същност е много трудно да се определят рисковите фактори. Използването на много фактори изисква изчислението на множество бета коефициенти, което води до големи статистически грешки при тяхното изчисление. Освен това, няма гаранция, че всички свързани фактори са идентифицирани. Това усложнява модела и е причина АМОА да е доста по-малко разпространена и използвана от МОКА.

Забележка: допуснати грешки от част I (публикувана в Бизнес Посоки, 1/2007)

Авторът би искал да се извини за допускането на следните печатни и терминологични грешки в първата част на сегашната статия:

- След внимателно обмисляне на те като използваните понятия, следва да се въведе следната корекция навсякъде където е споменато понятието „ефикасен портфейл” (вкл. И производните езикови форми), то трябва да се чете като „оптимален портфейл.
- В уравнение (2) на стр. 42 погрешно е използван символът „δ” (чете се „делта”), вместо символа „σ” (чете се „сигма”).
- На стр. 44 в дясната колона във втория параграф е написано „(1)” и по-долу „(2)”, но трябва да се чете съответно „1)” и „2)”.
- При редакторската намеса някои от формулите и фигурите са разместени в неудобни за четене позиции.

Разширена библиография / References:

1. Jones, C. P., “Investments: Analysis and Management”, John Wiley & Sons, New York, 1994
2. Alexander, G. J., W. F. Sharpe, J. V. Bailey, “Fundamentals of Investments (Second edition)”, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1993
3. Sharpe, W. F., G. J. Alexander, J. V. Bailey, “Investments (Fifth edition)”, Prentice Hall International Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1995
4. Sharpe, W. F., “A Simplified Model for Portfolio Analysis”, Management Science, Vol. 9, No. 2 (Jan., 1963), pp. 277-293
5. Tobin, J., “Liquidity Preference as Behaviour Towards Risk”, Review of Economic Studies, Vol. 25, No. 1, pp. 65-86, February 1958.
6. Sharpe W F., “Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk”, Journal of Finance 19:425-42, 1964
7. Lintner, J., “The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets”, Review of Economics and Statistics, February 1965
8. Mossin, J., “Equilibrium in a Capital Asset Market”, Econometrica, October 1966
9. Markowiz, H., Portfolio Selection, Journal of Finance, 1952

10. Markowitz, H., “Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments”, John Wiley & Sons, New York, 1959

11. Chen, N., R., Roll, S., Ross, “Economic Forces and the Stock Market”, Journal of Business, Vol. 59, No. 3, pp. 383-403, July 1986.

12. Lehmann, B., “The Legacy of Fischer Black”, Oxford University Press US, 2005

13. Ross, S., “The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing”, Journal of Economic Theory, Vol. 13, No. 3, pp.341-360, December 1976.

14. Benniga, S., Financial Modeling, The MIT Press, Cambridge Massachusetts, 2000.

15. Bodie, Z. A. Kane, A. Marcus, “Investments”, IRWIN, Chicago, 1996.

16. Marchev,A. ml., “Evolyutshiya na suvremennata teoriya za investitshionni portfeyli chast I”, Biznes posoki, 1/2007, Burgaski svoboden universitet

17. Haugen, R., “Modern Investment Theory”, Prentice Hall, New Jersey, 1993.

18. Black, F., “Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing”, The Journal of Business, Vol. 45, No. 3, pp. 444-455, July 1972.

19. Black, F., M. Jensen, M. Scholes, “The Capital Asset Pricing Model: Some Empirical Tests”, pp. 79-121 in M. Jensen ed., Studies in the Theory of Capital Markets, Praeger Publishers, New York, 1972.

20. Reilly. F. K., K. C. Brown, Investment Analysis and Portfolio Management, South Western, a division of Thomas Learning, 2003

21. Putev, P., N. Kanariyan, “Upravlenie na portfeyla”, Abagar, Veliko Turnovo, 2008.