НОВИ ТЕНДЕНЦИИ В КАЧЕСТВЕНАТА ТЕОРИЯ НА ИМПУЛСНИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ: ИМПУЛСНИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ ОТ ДРОБЕН РЕД

проф. дмн Гани Трендалилов Стамов
Технически университет – София, ИПФ-Сливен

доц. дмн Иванка Милкова Стамова
Бургаски свободен университет

NEW TRENDS IN THE QUALITATIVE THEORY OF IMPULSIVE DIFFERENTIAL EQUATIONS: IMPULSIVE DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FRACTIONAL ORDER

Gani Trendafilov Stamov
Ivanka Milkova Stamova

***Abstract*:** *In this paper, impulsive differential equations of fractional order are investigated. Some new stability and almost periodic results are presented. The objective of the research is to present a theoretic framework for qualitative analysis and optimal control of a variety of fractional-order differential systems under external perturbations.*

Key words: *impulsive differential equations; fractional derivatives; qualitative theory*

1. Увод

Изследванията, свързани с производни от дробен ред бележат своето начало с кореспонденцията между Лайбниц и Лопитал през 1695 [6]. Въпреки, че това, което се нарича „fractional calculus“ има история, която е по-дълга от 3 века, неговата практическа реализация и приложения са фокус на интереса в последните няколко години. Диференциалните уравнения от дробен ред намират все по-широко приложение в различни области на науката и практиката и се разглеждат като по-адекватни математическите модели в редица ситуации [2-6, 9, 13].

Също така, във връзка с развитие на математическо моделиране и симулации в теория на хаоса, динамика на флуидите и различни физични системи, в последните години интереса към развитие на теорията на функционално-диференциалните уравнения от дробен ред е засилен [1, 11] и изследванията на импулсни диференциални уравнения от дробен ред започнаха [7, 8, 10, 12, 14].

Експлозията в научните изследвания, свързани с импулсни диференциални уравнения, както и на импулсни функционало-диференциални уравнения от дробен ред води до необходимостта от развитие на качествена теория на такива уравнения. Целта на този доклад е да се представят основни резултати на авторите по устойчивост и почти периодичност на решенията на импулсни уравнения от дробен ред [7, 8, 10, 12]. Резултатите са получени с помощта на обобщение на втория метод на Ляпунов.

2. Предварителни бележки и дефиниции

Нека R^n е n- мерното Евклидово пространство и $\|.\|$ е нормата на вектора $x \in R^n$. Нека $R_+ = [0,\infty)$, $R = (-\infty,+\infty)$, $J \subseteq R$, $t_k < t_{k+1} < \dots$, $\lim\limits_{k\to\pm\infty} t_k = \pm\infty$ и $PC\left[J, R^n\right] = \{x : J \to R^n : x$ е частично непрекъсната функция в J с точки на прекъсване от първи род $t_k, k = \pm1,\pm2,\dots$, в които е непрекъсната отляво $\}$.

Разглеждаме системата от импулсни диференциални уравнения от дробен ред

$$(2.1) \qquad \begin{cases} {}_{t_0}D_t^p x(t) = f(t, x(t)), \quad \Phi(t, x(t)) \neq 0, \\ \Delta x(t)\Big|_{\Phi(t,x(t))=0} = I_k(x(t)), \quad k = \pm1,\pm2,\dots, \end{cases}$$

където $t_0 \in R$, $f : R \times R^n \to R^n$, $I_k : R^n \to R^n$, $k = \pm1,\pm2,\dots$, ${}_{t_0}D_t^p$ означава или производна в смисъл на Капуто или производна в смисъл на Риман-Лиувил от ред p, $p \in R$, $\Delta x(t) = x(t^+) - x(t)$ и следната система импулсни функционално-диференциални уравнения от дробен ред

$$(2.2) \qquad \begin{cases} {}_{t_0}D_t^p x(t) = f(t, x_t), \quad \Phi(t, x(t)) \neq 0, \\ \Delta x(t)\Big|_{\Phi(t,x(t))=0} = I_k(x(t)), \quad k = \pm1,\pm2,\dots, \end{cases}$$

където $f : R \times PC \to R^n$, $PC = PC[[-r,0], R^n]$, $r > 0$, за $t \in R$, $x_t \in PC$ е дефинирано от $x_t(s) = x(t+s)$, $-r \le s \le 0$ и $t = t_k$ е момент на импулсно въздействие на решението $x(t)$, ако $\Phi(t_k, x(t_k)) = 0$, $k = \pm1,\pm2,\dots$, т.е моментите на импулсно въздействие настъпват, когато е изпълнено дадено пространствено-времево съотношение $\Phi(t,x) = 0$, $(t,x) \in R \times R^n$.

За интегрируема в интервала $[t_0, t]$ функция l, ще използваме, съответно, следните производни на Риман-Лиувил и Капуто:

$${}_{t_0}^{RL}D_t^p l(t) = \frac{d^{[p]+1}}{dt^{[p]+1}}\left[{}_{t_0}D_t^{-([p]-p+1)} l(t)\right],$$

$${}_{t_0}^{C}D_t^p l(t) = {}_{t_0}D_t^{-([p]-p+1)}\left[\frac{d^{[p]+1}}{dt^{[p]+1}} l(t)\right],$$

където $[p]$ означава цялата част на p,

$${}_{t_0}D_t^{-p} l(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_{t_0}^{t} l(\tau)(t-\tau)^{p-1} d\tau,$$

и Γ е гама- функцията. Ще изследваме основно случая $0 < p < 1$.

Въвеждаме следните означения:

$$G_k = \{(t,x) \in (t_0,\infty) \times R^n : t_{k-1} < t < t_k\}, \; k = \pm1,\pm2,\dots, \; G = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} G_k.$$

Въвеждаме класът V_0 от всички функции $V:[t_0,\infty)\times R^n \to R$, които са непрекъснати и локално Липшицови по втория си аргумент при $t \neq t_k, k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ и за които съществуват и са крайни границите

$$\lim_{t\to t_k, t<t_k} V(t,x) = V(t_k - 0, x), \qquad \lim_{t\to t_k, t>t_k} V(t,x) = V(t_k + 0, x)$$

и е в сила равенството $V(t_k, x) = V(t_k - 0, x)$ при всяко $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$

За $t \neq t_k, k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ и $V \in V_0$ дефинираме производната на Дини по отношение на система (2.1)

$$D^+_{(2.1)} V(t, x(t)) = \limsup_{h\to 0^+} \frac{1}{h}[V(t+h, x(t+h)) - V(t, x(t))].$$

Дефинираме и следните производни в смисъл на Капуто от ред q ($0 < q < 1$):

- Производна на Капуто по отношение на система (2.1):

$$^c D^q_+ V(t,x) = \limsup_{h\to 0^+} \frac{1}{h}[V(t,x) - V(t-h, x - h^q f(t,x)], \quad t \neq t_k, k = \pm 1, \pm 2, \ldots;$$

- Производна на Капуто по отношение на система (2.2):

$$^c D^q_+ V(t,\varphi) = \limsup_{h\to 0^+} \frac{1}{h}[V(t,\varphi(0)) - V(t-h, \varphi(0) - h^q f(t,\varphi)],$$

$\varphi \in PC$, $t \neq t_k, k = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Ще отбележим, че

$$^c D^q_+ V(t,x) = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_{t_0}^{t} \frac{D^+_{(2.1)} V(\tau, x(\tau))}{(t-\tau)^q} d\tau .$$

Ще предполагаме, че функциите f и I_k са достатъчно гладки за да са гарантирани съществуването, единствеността и непрекъснатата зависимост на решенията на системи (2.1) и (2.2) от начални данни.

В следващите резултати ще използваме класът V_0 от функции, за които е изпълнено условието

H2.1. $V(t,0) = 0$, $t \geq t_0$

и класът от функции $K = \{a \in C[R_+, R_+] : a(r)$ е строго растяща и $a(0) = 0\}$.

3. Основни резултати

3.1. Глобална устойчивост

В този параграф ще приведем основни резултати за глобална устойчивост на нулевото решение на система (2.1) с фиксирани моменти на импулсно въздействие, т.е., разглеждаме системата

$$(3.1) \qquad \begin{cases} {}_{t_0}D^p_t x(t) = f(t,x), \ t \neq t_k, \ t > t_0, \\ \Delta x(t_k) = x(t_k + 0) - x(t_k) = I_k(x(t_k)), \quad t_k > t_0, \ k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \end{cases}$$

където $\ldots < t_{-1} < t_0 < t_1 < \ldots < t_k < t_{k+1} < \ldots$, $\lim_{k\to\pm\infty} t_k = \pm\infty$.

Нека $x_0 \in R^n$. Означаваме с $x(t) = x(t; t_0, x_0)$ решението на система (3.1) с производна в смисъл на Капуто ${}_{t_0}D_t^p = {}_{t_0}^{C}D_t^p$, което удовлетворява начално условие

$$x(t_0 + 0; t_0, x_0) = x_0 \ .$$

В случая на производна в смисъл на Риман-Лиувил, ${}_{t_0}D_t^p = {}_{t_0}^{RL}D_t^p$, началното условие е във вида

$${}_{t_0}D_t^{p-1} x(t_0 + 0; t_0, x_0) = x_0 \ .$$

Валидна е следната релация:

$$x(t_0 + 0; t_0, x_0) = \frac{x_0}{\Gamma(p)} (t - t_0)^{p-1} \ .$$

Дефиниция 3.1. Нулевото решението $x(t) = 0$ на система (3.1) се нарича:

(а) *устойчиво*, ако

$$(\forall t_0 \in R) \quad (\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists \delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0) \quad (\forall x_0 \in R^n : \| x_0 \| < \delta)$$
$$\| x(t; t_0, x_0) \| < \varepsilon ;$$

(б) *глобално екви-привличащо*, ако

$$(\forall t_0 \in R) \quad (\forall \lambda > 0) \quad (\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists T = T(t_0, \lambda, \varepsilon) > 0) \quad (\forall x_0 \in R^n : \| x_0 \| < \lambda)$$
$$(\forall t \geq t_0 + T) : \quad \| x(t; t_0, x_0) \| < \varepsilon ;$$

(в) *равномерно глобално привличащо*, ако числото T от (б) не зависи от t_0;

(г) *глобално екви-асимптотически устойчиво*, ако то е устойчиво и глобално екви-привличащо;

(д) *равномерно глобално асимптотически устойчиво*, ако то е равномерно устойчиво, равномерно глобално привличащо и решенията на (3.1) са ограничени.

Тъй като ще изследваме устойчивостта на нулевото решение на (3.1) са необходими следните хипотези.

Н3.1. $f(t,0) = 0, \ t \in R.$

Н3.2. $I_k(0) = 0, \ k = \pm 1, \pm 2, \ldots.$

Теорема 3.1. *Нека са изпълнени следните условия:*

1. *Изпълнени са условията Н2.1, Н3.1, Н3.2.*
2. *Функциите* $V \in V_0$ *и* $a \in K$ *са такива, че*

$$a(\| x \|) \leq V(t, x), \qquad (t, x) \in [t_0, \infty) \times R^n ;$$

$$V(t + 0, x + I_k(x)) \leq V(t, x), \ x \in R^n \ , \ t = t_k, \ t_k > t_0 ;$$

$${}^{c}D_+^q V(t, x) \leq -wV(t, x), \qquad (t, x) \in G, \ t \in [t_0, \infty), \ w > 0 \ .$$

Тогава нулевото решение на система (3.1) е глобално екви-асимптотически устойчиво.

Теорема 3.2. *Нека са изпълнени следните условия:*

1. *Изпълнено е условие 1 на теорема 3.1.*

2. Функциите $V \in V_0$ *и* $a, b, w \in K$ *са такива, че*

$$a(\|x\|) \le V(t,x) \le b(\|x\|), \quad (t,x) \in [t_0, \infty) \times R^n,$$

$a(u) \to \infty$ *при* $u \to \infty$;

$$V(t+0, x + I_k(x)) \le V(t,x), \; x \in R^n, \; t = t_k, \; t_k > t_0,$$

$$^c D_+^q V(t,x) \le -w(\|x\|), \; (t,x) \in G, \quad t \in [t_0, \infty).$$

Тогава нулевото решение на система (3.1) е равномерно глобално асимптотически устойчиво.

3.2. Митаг-Лефлер устойчивост

В този параграф ще приложим директния метод на Ляпунов за изследване на Митаг-Лефлер устойчивостта на решенията на система (2.2) с фиксирани моменти на импулсно въздействие при ${}_{t_0}D_t^p = {}^C_{t_0}D_t^p$, т.е. разглеждаме системата

$$(3.2) \qquad \begin{cases} {}^C_{t_0}D_t^p x(t) = f(t, x_t), \; t \ne t_k, \; t > t_0, \\ \Delta x(t_k) = I_k(x(t_k)), \quad t_k > t_0, \; k = 1,2,..., \end{cases}$$

където $f : (t_0, \infty) \times PC \to R^n$, $I_k : R^n \to R^n$, $k = 1,2,...$, $t_0 < t_1 < ... < t_k < t_{k+1} < ...$, $\lim_{k \to \infty} t_k = \infty.$

Нека $\varphi_0 \in PC$. Означаваме с $x(t) = x(t; t_0, \varphi_0)$ решението на система (3.2), което удовлетворява начални условия

$$\begin{cases} x(t) = \varphi_0(t - t_0), \; t \in [t_0 - r, t_0], \\ x(t_0 + 0) = \varphi_0(0). \end{cases}$$

Нека $\|\varphi\|_r = \sup_{t \in [t_0 - r, t_0]} \|\varphi(t - t_0)\|$ е нормата на функцията $\varphi \in PC$.

Разглеждаме функцията на Митаг-Лефлер

$$E_q(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(qj+1)}, \; q > 0, \; z \in C.$$

Въвеждаме следната дефиниция.

Дефиниция 3.2. Нулевото решението на система (3.2) се нарича *Митаг-Лефлер устойчиво*, ако

$$(\forall t_0 \in R) \; (\exists \rho > 0) \; (\forall \varphi_0 \in PC : \|\varphi_0\|_r < \rho) \; (\exists \mu > 0) \; (\exists d > 0)$$

$$(\forall t > t_0) : \|x(t; t_0, \varphi_0)\| < \left\{ m(\varphi) E_q\left[-\mu(t - t_0)^q\right] \right\}^d,$$

където $q \in (0,1)$, $m(0) = 0$, $m(\varphi) \ge 0$ и $m(\varphi)$ е Липшицова по $\varphi \in PC$, $\|\varphi\|_r < \rho$.

Теорема 3.3. *Нека са изпълнени следните условия:*

1. Изпълнено е условие 1 на теорема 3.1.

2. Функцията $V \in V_0$ *е такава, че за всяко* $\alpha > 0$ *съществува* $\gamma = \gamma(\alpha) > 0$, *такова че*

$$\|x\| \le V(t,x) \le \gamma(\alpha)\|x\|, \qquad (t,x) \in [t_0, \infty) \times R^n.$$

2. *Изълнени са неравенствата*

$$V(t+0,\varphi(0)+I_k(\varphi)) \le V(t,\varphi(0)),\ \varphi \in PC\ ,\ \ t = t_k,\ t_k > t_0\ ;$$

$${}^c D_+^q V(t,\varphi(0)) \le -w\, V(t,\varphi(0)), \qquad t \ne t_k,\ k = 1,2,...$$

е валидно за $t \ge t_0$, $\varphi \in PC$, $V(t+s,\varphi(s)) \le V(t,\varphi(0))$, $-r \le s \le 0$, $w > 0$.

Тогава нулевото решение на система (3.2) е Митаг-Лефер устойчиво.

3.3. Почти периодичност

Разглеждаме система (3.1) с моменти на импулсно въздействие от множеството

$$\mathrm{B} = \left\{\{t_k\},\ \ t_k \in R,\ \ t_k < t_{k+1},\ \ k = \pm 1, \pm 2, ...,\ \ \lim_{k\to\pm\infty} t_k = \pm\infty\right\}.$$

Разглеждаме редиците $\{t_k^j\}$, $t_k^j = t_{k+j} - t_k$, $k = \pm 1, \pm 2, ...,\ j = \pm 1, \pm 2, ...$.

Дефиниция 3.3. Множеството от редици $\{t_k^j\}$, $t_k^j = t_{k+j} - t_k$, $k, j = \pm 1, \pm 2, ...$ се нарича *равномерно почти периодично*, ако за произволно $\varepsilon > 0$ съществува относително плътно множество от техните $\varepsilon -$ почти периоди .

В изследванията за съществуване на почти периодични решения на импулсни диференциални уравнения е важен въпросът за отделимост от нулата на редиците от вида $\{t_k\} \in \mathrm{B}$, т. е. винаги ще предполагаме, че е изпълнено е неравенството

$$\inf_{k=\pm 1, \pm 2, ...} t_k^1 = \theta > 0 .$$

Ще използваме и множеството $UAPS$, $UAPS \subset \mathrm{B}$, за което редиците $\{t_k^j\}$, $t_k^j = t_{k+j} - t_k$, $k, j = \pm 1, \pm 2, ...$ образуват равномерно почти периодичното множество и $\inf\limits_k t_k^1 = \theta > 0$.

Дефиниция 3.4. Функцията $\varphi \in PC\left[R, R^n\right]$ се нарича *почти периодична*, ако:

(a) $\{t_k\} \in UAPS$.

(б) за всяко $\varepsilon > 0$ съществува положително число $\delta = \delta(\varepsilon)$ такова, че ако точките t' и t'' са от един и същи интервал на непрекъснатост на функцията $\varphi(t)$ и удовлетворяват неравенството $|t' - t''| < \delta$, то $\|\varphi(t') - \varphi(t'')\| < \varepsilon$.

(в) за всяко $\varepsilon > 0$ съществува относително плътно множество $\overline{T}$ такова, че ако $\tau \in \overline{T}$, то $\|\varphi(t+\tau) - \varphi(t)\| < \varepsilon$ за всяко $t \in R$, което удовлетворява условието $|t - t_k| > \varepsilon$, $k = \pm 1, \pm 2, ...$.

Елементите на множеството $\overline{T}$ ще наричаме $\varepsilon -$ *почти периоди.*

Основните резултати при изследване на почти периодичността с метода на Лапунов са получени с помощта на функции от класа V_0, за които

$$|V(t,x_1,y_1) - V(t,x_2,y_2)| \le L_V(\|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\|) .$$

Този клас от функции ще означаваме с V_2 .

Ще използваме и следните условия:

H3.3. Функцията $f(t,x)$ е почти периодична по t равномерно по отношение на $x \in R^n$.

Н3.4. Редицата от функции $\{I_k(x)\}$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ е почти периодична равномерно по $x \in R^n$.

Теорема 3.4. *Нека са изпълнени следните условия:*

1. Изпълнени са условията Н2.1, Н3.3 и Н3.4.

2. Съществуват функции $V \in V_2$ и $a, b \in \mathrm{K}$ такива, че

$$a(\|x-y\|) \le V(t,x,y) \le b(\|x-y\|), \ (t,x,y) \in R \times B_\alpha \times B_\alpha,$$

$$V(t+0, x+I_k(x), y+I_k(y)) \le V(t,x,y), \ x,y \in R^n, \ \ t = t_k, \ k = \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

$${}^c D_+^q V(t,x,y) \le -wV(t,x,y), \ \ x,y \in R^n, \ \ t \ne t_k, \ k = \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

където $w > 0$.

3. Съществува решение $x(t) = x(t; t_0, x_0)$ на система (3.1) такова, че $\|x(t;t_0,x_0)\| \le \alpha_1$, където $t \ge t_0$, $\alpha_1 < \alpha$.

Тогава в B_α съществува единствено почти периодично решение $\omega(t)$ на система (3.1) такова, че:

(а) $\|\omega(t)\| \le \alpha_1$;

(б) $\omega(t)$ е равномерно глобално асимптотически устойчиво.

Литература

1. M. Benchohra, J. Henderson, S.K. Ntouyas and A. Ouahab, Existence results for fractional order functional differential equations with infinite delay, J. Math. Anal. Appl. 338: 1340–1350, (2008)
2. K. Diethelm, The Analysis of Fractional Differential Equations. An Application-oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type, Berlin: Springer, 2010
3. E. Kaslik and S Sivasundaram, Nonlinear dynamics and chaos in fractional order neural networks, Neural Netw. 32, 245–256, (2012)
4. A. Kilbas and H. Srivastava, J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, New York: Elsevier, 2006
5. N. Laskin, Fractional market dynamics, Phys. A 287: 482–492, (2000)
6. I. Podlubny, Fractional Differential Equations, San Diego: Academic Press, 1999
7. G.T. Stamov, I.M.., Stamova, Impulsive fractional functional differential systems and Lyapunov method for existence of almost periodic solutions. Rep. Math. Phys.75, 73-84 (2015)
8. I.M. Stamova, Mittag-Leffler stability of impulsive differential equations of fractional order, Quart. Appl Math. (to appear) (2015)
9. I.M. Stamova, Global Mittag-Leffler stability and synchronization of impulsive fractional-order neural networks with time-varying delays, Nonlinear Dyn. 77, 1251–1260, (2014)
10. I.M. Stamova, Global stability of impulsive fractional differential equations, Appl. Math. Comput. 237, 605–612, (2014)
11. I.M. Stamova and G.T. Stamov, Lipschitz stability criteria for functional differential systems of fractional order, J. Math. Phys. 54: 43502, 11 pp. (2013)
12. I.M. Stamova and G.T. Stamov, Stability analysis of impulsive functional systems of fractional order, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 19, 702–709, (2014)
13. J.R. Wang, Y., Zhou, A class of fractional evolution equations and optimal controls. Nonlinear Anal. Real World Appl.12, 262-272 (2011)
14. J.R. Wang, Y. Zhou, M. Feckan, On recent developments in the theory of boundary value problems for impulsive fractional differential equations. Comput. Math. Appl. 64, 3008-3020 (2012)