МНОГОЗНАЧНИ ДИСКРЕТНИ ЛОГИЧЕСКИ СИТЕМИ

Пенка Вълкова Георгиева
Бургаски свободен университет

MANY-VALUED LOGIC SYSTEMS

Penka Valkova Georgieva
Burgas Free University

Abstract: *The many-valued logical systems rapidly convert from exotic structures, comprehensible only for few mathematicians, into a widely used tool for the software applications in the area of artificial intelligence. The aim of this paper is to introduce in short the main many-valued discrete logical systems and to provide a brief overview about some of their applications in practice.*

Key words: *mathematic logic systems, many-valued discrete logic, artificial intelligence*

I. КЛАСИЧЕСКА ДВУЗНАЧНА ЛОГИКА

Първите исторически известни източници с описания на правила за логически построения са възникнали във философските школи на Древна Гърция. Аристотел (IV в. пр. н. е.) описва цяла система от логически схеми на умозаключения, които са верни, независимо от смисъла на термините, които участват в тях и това са твърдения, които са верни само по силата на формата си [1].

За основоположник на символната логика се счита Лайбниц, който излага в трудовете си основните принципи за математическото построяване на логически ситеми. [2], [3]

През XIX в., главно чрез усилията на Морган и Бул е създадена алгебрата на бинарните релации, като Бул предлага в [4] първата систематично изградена алгебра на класовете. В края на XIX в. възниква науката Математическа логика. Революцията в областта на математическата строгост (Коши, Болцано, Вайерщрас, Дедекинд) поражда необходимостта да се преразгледат критично езикът, който се използва в математиката; методите, чрез които се дефинират абстрактните математически обекти; както и законите на логиката. Важен принос имат трудовете на Пеано и Фреге. В тях и особено в монографията на Ръсел и Уайтхед „Principia mathematica“ [5] са въведени всички основни идеи на математическата логика: използване на изкуствени логически езици, чиито елементи изразяват, когато са интерпретирани, математически факти; формулиране на специални правила за преминаване от едни формули към други правила за извод; изучаване на формални аксиоматични теории, т. е. на системи, които се състоят от аксиоми и правила за извод.

В класическата двузначна логика основни понятия са ВЯРНО и НЕВЯРНО и като такива те не се дефинират. Съждение p е всяко декларативно изречение, което е или вярно или невярно.

В този смисъл съждения са: {*В момента вали.*}, {*Утре ще изгрее слънце.*}, {*Розата не е цъфнала.*}, докато {*Колко е часът?*}, {*Ела тук!*}, {*Можеш да оставиш тази книга!*} не са съждения.

Особен клас съждения са тези, които водят до логически парадокс, като например {*Аз те лъжа.*}, {*Всички правила имат изключения.*}, {*Всепомитащо гюле се сблъсква с неразрушим стълб.*} и други.

Основните операции със съждения са: логическо отрицание $\neg p$, конюнкция $p \wedge q$, дизюнкция $p \vee q$, импликация $p \rightarrow q$, еквивалентност $p \leftrightarrow q$.

Съждения, които са верни независимо от избора на променливите, се наричат ***тавтологии*** (аксиоми и теореми) или *закони*. Например тавтологии са:

1) Закон за идентичност *p e p.* (аксиома 1)
2) Закон за непротиворечивост *p не е* $\neg p$. $\neg(p \wedge \neg p)$ (аксиома 2)
3) Закон за изключеното трето *p или* $\neg p$. $p \vee \neg p$ (аксиома 3)
(всяко твърдение е или вярно или грешно)
4) Закон за доказателство с допускане на логическо отрицание
$$(\neg p \wedge (\neg p \Rightarrow (q \wedge \neg q))) \Rightarrow p$$
5) Закони на Де Морган

5a) $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ $\quad \dfrac{\neg(p \wedge q)}{\therefore\ \neg p \vee \neg q}$

5b) $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge\vee \neg q)$ $\quad \dfrac{\neg(p \vee q)}{\therefore\ \neg p \wedge \neg q}$

Формулите, които могат да бъдат получени от аксиомите с помощта на логическите правила, се наричат *теоремите на логическото смятане*. Най-елементарният логически език е езикът на съждителната логика. Теоремите на съждителното смятане се получават от аксиомите чрез правила от вида ***модус поненс*** (правило за извод, според което от верността на съждението p и импликацията $p \rightarrow q$ се получава верността на q) и правилото за субституция (от верността на съждението p след заместване на някоя променлива, която се среща в p, с формулата q, може да се изведе верността на резултата).

Важно свойство на правилата за извод е, че запазват верността на формулите.

II. МНОГОЗНАЧНА ЛОГИКА

Многозначните логически системи са подобни на класическата двузначна логика, защото съдържат принципа за вярност на съжденията. Фундаменталната разлика е, че броят на стойности на вярност не са само две – законът за изключеното трето не е валиден. В многозначната логика не съществува стандартно тълкуване на степените на вярност. Начинът, по който тези степени се дефинират, зависи от областта на приложение, но е общоприето, че има две специални степени на вярност, (обикновено означени с 1 и 0), като смисълът им съвпада с този в класическата логика – съответно вярно и невярно.

В многозначните логически системи степените на вярност биват третирани като технически средства и биват избирани подходящо за конкретните приложения. Философският проблем за смисъла на понятията степен на истина (неистина) не е обект на изследване на логическите системи.

Формализираните езици на системите с многозначна логика следват двата стандартни модела на съждителната и предикатната логика, съответно:

- съществуват съждителни променливи, като основните операции и константите за степента на вярност са дефинирани;
- съществуват променливи, предикатни символи, константи и функционални символи, както и квантори, свързващи константите за степента на вярност в случая на езиците от първи ред.

Семантично многозначните логически системи следват един от следните три основни подхода: стандартни логически матрици; алгебрична семантика; семантика, основана на теория на игрите.

Стандартни логически матрици. Удобен начин за дефиниране на система ***S*** на многозначна логика е да се определи характеристичната логическа матрица за нейния език, което означава, че се фиксират:

- множеството от степени на вярност;
- функциите на степента на вярност, които интерпретират операциите;
- смисъла на константите за степените на вярност;
- семантичното тълкуване на кванторите;

и допълнително:

- определените степени на вярност, които образуват подмножество на множеството *W* от степените на вярност и заместват традиционния смисъл на *verum* (вярно, истина),
- и в някои случаи на степените на вярност, които образуват подмножество на множеството *W* от степените на вярност и заместват традиционния смисъл на *falsum* (фалшив, погрешен, неверен).

Една формула ***A***, конструирана в съждителен език, се счита за *валидна* при стойност α, ако степента на вярност може да бъде пресметната и е тавтология.

Алгебрична семантика. Този тип семантика използва характеристичен клас ***K*** на алгебрични структури. Всяка такава алгебрична структура трябва да осигури всички данни, които биват получени от характеристичната логическа матрица за езика на ***S***.

Понятието за валидност на формула ***A*** по отношение на алгебрична структура от ***K*** се дефинира така, че тази структура да може да формира логическа матрица. *Логическа валидност* тук означава валидност за всички структури от класа ***K.***

Алгебричните структури, които формират такъв характеристичен клас ***K*** за система ***S*** на многозначна логика имат подобна роля за ***S,*** както булевата алгебра за класическата логика.

Семантика, основана на теория на игрите. Съществуват разнообразни начини за свързване на логическа система и теорията на игрите. Например, диалогичната логика предлага игрална теоретична семантика за класическата и за интуиционистичната логика. Наистина, една формула се счита за валидна, ако играчът, който заявява тази формула, има печеливша стратегия за всички възможни атаки, които противникът може да реализира.

В контекста на връзката между размитите множества и многозначната логика, идеята за разглеждане на логическата валидност от гледна точка на теорията на игрите е със следната основна идея: „*съждението представлява вяра, изразена осезателно под формата на залог*“. В този смисъл, съждението ψ следва от съжденията $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ само когато този, който приема залозите $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ може едновременно да заложи ψ без страх от загуба.

Формалният език, получен по този начин, е директно свързан с безкрайно-значната логика на Лукашевич L_∞. Нещо повече, двете системи съвпадат, ако се присвои на съждението ϕ стойност на вярност $1-\langle\phi\rangle$, където $\langle\phi\rangle$ е цената на поетия риск при заявяване на ϕ.

III. СИСТЕМИ С МНОГОЗНАЧНА ЛОГИКА

1. Логическа система на Лукашевич

Дискретната логическа система L_m се дефинира с логическата матрица

$$W_m = \left\{\frac{k}{m-1}\middle|0 \le k \le m-1\right\},$$

която задава стойностите за степени на вярност.

Основните операции в тази система са:

- силна конюнкция $tv(u \,\&\, v) = max\{\,0\,, tv(u) + tv(v) - 1\}$;
- слаба конюнкция $tv(u \wedge v) = min\{tv(\,u)\,, tv(v)\}$;
- логическо отрицание $tv(\neg u) = 1 - tv(u)$;
- силна дизюнкция $tv(\neg(u \,\&\, v)) = 1 - max\{\,0\,, tv(u) + tv(v) - 1\}$;
- слаба дизюнкция $tv(\neg(u \wedge v)) = 1 - min\{tv(\,u)\,, tv(v)\}$;
- импликация $tv(u\ \rightarrow\ v) = min\{\,1\,, 1 - tv(u) + tv(v)\}$,

където с $tv(w)$ е означена степента на вярност на съждението w.

За логика на Лукашевич от първи ред се добавят двата квантора $\forall$ и $\exists$, като

$$\forall x H(x) = \inf_{H(x)}\{tv(w(x))\}\,;$$
$$\exists x H(x) = \sup_{H(x)}\{tv(w(x))\}\,;$$

където $tv\big(w(x)\big)$ са степените на вярност за $H(x)$.

2. Логическа система на Гьодел

Дискретната логическа система G_m се дефинира с логическа матрица върху крайно множество

$$W_m = \left\{\frac{k}{m-1}\middle|0 \le k \le m-1\right\},$$

която задава стойностите за степени на вярност. Стойност на вярност 1 е единствената предварително зададена степен на вярност.

Основните операции в тази система са:

- конюнкция $tv(u \wedge v) = min\{\,tv(u)\,, tv(v)\}$;
- дизюнкция $tv(u\ \vee\ v) = max\{\,tv(u)\,, tv(v)\}$;
- логическо отрицание $tv(\neg u) == \begin{cases} 1\,, tv(u) = 0 \\ 0\,,\ tv(u) \neq 0 \end{cases};$
- импликация $tv(u\ \rightarrow\ v) = \begin{cases} 1\ ,\ tv(u) = 0 \\ tv(v)\,,\ tv(u) \neq 0 \end{cases}$'

където с $tv(w)$ е означена степента на вярност на съждението w.

За логика на Гьодел от първи ред също се добавят двата квантора $\forall$ и $\exists$, като

$$\forall x H(x) = \inf_{H(x)}\{w(x)\}\,;$$
$$\exists x H(x) = \sup_{H(x)}\{w(x)\}\,;$$

където $tv\big(w(x)\big)$ са степените на вярност за $H(x)$.

3. Тризначни логически системи

През 1978 Блау предлага степен на вярност за съждения, които са безсмислени, недефинирани, парадоксални и с това провокира изследвания върху тризначни логики. [6]

В тризначните логически системи се добавя допълнителна степен на вярност, различна от двете степени на вярност в класическата двузначна логика.

Клийне използва за степени на вярност освен 0 (невярно съждение) и 1 (вярно съждение) и допълнителната стойност $\frac{1}{2}$ (недефинирана вярност).

За основни операции Клийне използва слаба конюнкция, слаба дизюнкция и логическо отрицание от логическата система на Лукашевич L_3 и конюнкция $\wedge_+$ и импликация $\rightarrow_+$, зададени със следните таблици:

$\wedge_+$	0	$1/2$	1
0	0	$1/2$	0
$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$
1	0	$1/2$	1

$\rightarrow_+$	0	$1/2$	1
0	1	1	1
$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$
1	0	$1/2$	1

4. Четиризначна логическа система на Дън/Белнап

Четиризначна дискретна логическа система може да бъде дефинирана с логическа матрица върху крайно множество

$$W^* = \{\emptyset, \{\bot\}, \{\top\}, \{\bot, \top\}\},$$

като степента на вярност се интерпретира съответно:

$\emptyset$ – *липсва информация;*

$\{\bot\}$ – *има информация за неналичност на състоянието;*

$\{\top\}$ – *има информация за наличност на състоянието;*

$\{\bot, \top\}$ – *има противоречива информация за едновременна наличност и неналичност на състоянието.*

Множеството от стойностите за степени на вярност имат две подреждания в решетка, съответно за истинност и информация. Логическите операции се дефинират като:

- за конюнкция се използва *infimum;*
- за дизюнкция се използва *supremum;*
- за логическо отрицание – стойностите на вярност на $\{\bot\}$ и $\{\top\}$ се разменят, а стойностите на $\emptyset$ и $\{\bot, \top\}$ се запазват;
- за импликация:
  - в приложения, свързани с компютърни науки – $\{\top\}$ е с предварително зададена стойност на вярност;
  - в други приложения – $\{\top\}$ $\{\bot, \top\}$ са с предварително зададени стойности на вярност.

Предложена като обобщение на 4-значната логика е 16-значна логика.

5. Мултипликативни логически системи

Различните логически ситеми имат един общ проблем, който е намирането на интуитивно разбиране за степените на вярност. Той може да бъде преодолян, ако се приеме подход, при който се приема, че стойностите на степените на вярност включват различни аспекти от оценката на съжденията. Тогава, k различни аспекта на оценката на верността могат да бъдат представени като наредени k-орки от числа.

При дефиниране на операциите (и функциите) в такива k-значни логики, всъщност се реализира декартово произведение и така логическите системи се разглеждат като мултипликативни.

Например, 4-значната система на Дън/Белнап може да бъде разгледана като оценяваща два аспекта на състоянията:

- наличие или отсъствие на неположителна информация за верността на тези състояния;
- наличие или отсъствие на неположителна информация за неверността на тези състояния.

Всеки от двата аспекта може да бъде изследван, като се използват стандартните бинарни стойности на вярност за тази оценка.

В този случай конюнкцията, дизюнкцията и логическото отрицание на 4-значната система на Дън/Белнап могат да бъдат дефинирани чрез конюнкцията, дизюнкцията и логическото отрицание на класическата логика, т.е. тази 4-значна система е декартово произведение на две копия на класическата бинарна логика.

6. Дискретна размита логика

Основните понятия в размитата логика са *лингвистични променливи*, *лингвистични модификатори, съждителна размита логика*, *дедуктивни правила за извод*, *апроксимации.*

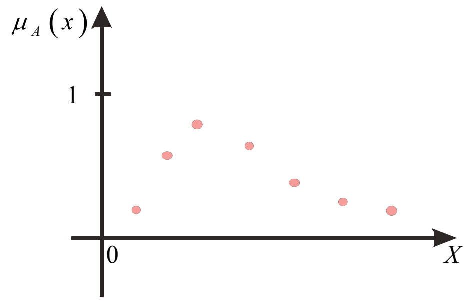
Лингвистична променлива се задава с наредената петорка $(\eta, T(\eta), U, G, M)$, където η е името на размитата променлива; $T(\eta)$ е множеството от лингвистичните стойности на променливата η, като всяка от тези лингвистични стойности е размито множество върху универсума U; G е синтактично правило, което генерира елементите на $T(\eta)$ и M е семантично правило, което асоциира всяка лингвистична стойност T с нейния смисъл $M(T)$, като $M(T)$ е размито множество върху U.

Нека $A \subseteq U$ е фиксирано подмножество на универсума U. Множеството

$$\Phi_{\mathrm{A}} = \{\langle x, \mu_A(x)\rangle | x \in U\}$$

се нарича размито множество върху U, ако функцията $\mu_A(x)$, наречена степен на принадлежност, задава за всяко $x \in U$ точно едно реално число, принадлежащо на интервала $[\,0;\ 1]$. [1]

На фигура 1 е показана дискретна функция на принадлежност $\mu_A(x)$.



Фиг. 1. Дискретна функция на принадлежност

[1] По-подробно изложение за теорията на размитите множества може да бъде намерено в [7].

Нека $\mathrm{K} = \{\langle x, \mu_K(x)\rangle | x \in \mathrm{U}\}$ и $\Lambda = \{\langle x, \mu_\Lambda(x)\rangle | x \in \mathrm{U}\}$ са размити множества. В размитата логика основно се оперира с три вида съждения:

(i) v е K - съждение в канонична форма;

(ii) v е mK - модифицирано съждение;

(iii) ако v е K, то w е Λ - условно съждение.

За съждения p и q от вида (i) се дефинират основните логически операции:

- за логическо отрицание $\neg p$ се използва $1 - \mu_K(x)$;
- за конюнкция $p \wedge q$ се използва $min(\mu_K(x);\ \mu_\Lambda(x))$;
- за дизюнкция $p \vee q$ се използва $max(\mu_K(x);\ \mu_\Lambda(x))$;
- за импликация $p \to q$ се използва $min(\ 1\ ; 1 -\ \mu_K(x) +\ \mu_\Lambda(x))$.[2]

Размито *АКО-ТО* правило има вида:

АКО x е A, *ТО* y е B;

където A и B са лингвистични стойности, дефинирани с размити множества върху универсума U. Първата част „x е A" е предпоставката, а втората „y е B" – заключението на правилото. Използва се и означението $A \to B$.

IV. ПРИЛОЖЕНИЯ НА МНОГОЗНАЧНИТЕ ЛОГИЧЕСКИ СИСТЕМИ

Логика. Многозначните логически системи се използват за по-добро разбиране на другите системи на логиката. Например, системите на Гьодел възникват от опита за проверка дали интуиционизмът може да бъде приеман за крайнозначна логика. Въвеждането на системите на Лукашевич първоначално е мотивирано от неуспешната идея да се разбере и въведе понятието за възможност с три стойности на вярност.

Друга област на приложение в логиката е сливането на различни видове логически системи (напр. формулирането на системи с класифицирани модалности).

Трети вид приложение в логиката е моделирането с непълни предикати в ситуации, в които има пропуски в стойностите на вярност.

Естествени езици. Едно от предизвикателствата при опериране с естествени езици е третирането на предположения, които са имплицитни в дадено изречение. Така например, изречението „Вчерашният вестник е жълт." съдържа екзистенциалната предпоставка, че вчера е имало вестник. Задачата за дефиниране на критерии, според които се конструира логическото отрицание на такива изречения и за разбиране на условията за вярност на импликациите, е сложна. Един подход за решаване на този проблем е да се използват много степени на вярност. Например, в мултипликативните системи с наредени двойки като степени на вярност, компонентите оценяват едновременно дали предпоставката е изпълнена или не и дали съждението е вярно или невярно. В този аспект използването на 3-значна логика е също подходящо.

Друга област за използване на инструментите на многозначната логика в лингвистиката е моделирането на естествен език.

[2] В размитата логика се използват и други дефиниции за импликация.

Философия. Как да се дефинира смисъла на понятието „истина“ е основен философски проблем. Логическият подход към този проблем се състои в допълване на формален език $\boldsymbol{L}$ с предикат за истина $\boldsymbol{T}$, който да се прилага към съждения от $\boldsymbol{L}$ или към съждения на разширението $\boldsymbol{L_T}$ на $\boldsymbol{L}$ с предикат $\boldsymbol{T}$.

Интересно приложение на многозначната логика е преодоляването на парадокси като купчината (*Sorites*):

(i) Една песъчинка не е купчина пясък. И *(ii) добавянето на една песъчинка към нещо, което не е купчина, не го превръща в купчина.* Следователно, *(iii) една песъчинка не може да се превърне в купчина пясък, без значение колко песъчинки се добавят към нея.*

В случая вярната предпоставка *(i)* дава невярно заключение *(iii)* чрез последователност от изводи, използващи *(ii)*. Средство за преодоляване на този логически парадокс е многозначната логика, при която се приема, че понятието купчина е *неясно*, т.е. е понятие, което може да се отнася до дадените обекти само до някаква степен (*размита логика*). Размитата логика предлага непрекъснат спектър от логически състояния, представени в единичния интервал на реалните числа [0,1] и така възможните стойности на вярност са безкрайно много и по този начин понятието гладко се изменя от „определено е купчина“ до „определено не е купчина“ със съответните нюанси между тях – „предимно купчина“, частично е купчина, донякъде е купчина, а не купчина.

Хардуерно проектиране. Класическата съждителна логика се използва като технически инструмент за анализ и синтез на някои видове електрически вериги, изградени от ключове с две стабилни състояния. Ясно обобщение е използването на m-значна логика за анализ на схеми, изградени от комутатори с m стабилни състояния.

Изкуствен интелект. Основната област на приложение на многозначните логически системи е свързана с опериране с неясни/неточни/непълни понятия, данни и разсъждения, например в експертни системи.

Друга област на приложение е обвързана с първата и има за цел автоматизирането на извличане на данни и знания.

Математика. Първата област на приложение е математическата теория на размитите множества и математическият анализ на размитите или приблизителни разсъждения.

Втората област е свързана с подходи за състоятелни доказателства в теорията на множествата с използване на подходяща система от многозначна логика.

V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Многозначните логически системи бързо се превръщат от екзотични структури, разбираеми само за тесен кръг математици, в широко използвано средство в областта на софтуерните приложения в областта на изкуствения интелект.

В тази статия накратко са представени основните многозначни дискретни логически системи и е направен кратък преглед на някои от приложенията им, без претенции за пълнота и изчерпателност.

Литература

1. Aristotle's Logic. Available: https://plato.stanford.edu/entries/aristotle-logic/
2. Leibniz G., Arte Combinatoria.1666. Available: http://www.math.ucla.edu/~ pak/ hidden/papers/Quotes/Leibniz-Arte-Combinatoria.pdf.
3. Лайбниц Г., Монадология, София: Изток-Запад, 2015.
4. Boole G., An Investigation of the Laws of Thought. 1853. Available: www.gutenberg.org/files/15114/15114pdf.pdf?session_id=3ec4657abc525727898ffe10 475747 f6aa47fbdd.
5. Whitehead. A., Principia Mathematica, Cornell University Library (2009), 1910-13.
6. Blau U., Die Logik der Unbestimmtheiten und Paradoxien by Ulrich Blau, Synchron, 2008
7. Georgieva P., FSSAM: A Fuzzy Rule-Based System for Financial Decision Making in Real Time. Handbook of Fuzzy Sets Comparison - Theory, Algorithms and Applications, Science Gate Publishing P.C., 2016.