ДИФЕРЕНЦИРАНЕ С ДРОБНИ ПРОИЗВОДНИ

Александър Иванов
Бургаски свободен университет

FRACTIONAL ORDER CALCULUS

Alexander Ivanov
Burgas Free University

Abstract: *Fractional order derivatives are recently rediscovered old concept with promising applications in modern science. This paper investigates some of the main tools for fractional order analysis in various fields, more specifically in the field of Information Technologies. Visual and numerical results are also applied for better representing the behavior of some phenomena and the characteristics of the described techniques.*

Key words: *fractional calculus, fractional derivatives, differential equations*

I. Увод

Дробните производни са неинтуитивна концепция с дълга история. За пръв път идеята е спомената в кореспонденция между Лайбниц и Л'опитал през 17 век. Оттогава насам много учени са дали своя принос за това идеята да се превърне в практически използваема техника за анализ на явления. В последните десетилетия има засилен интерес към темата и все повече и по-разнообразни феномени успешно се моделират с производни от дробен ред. В настоящата публикация е направен анализ на различни аспекти на смятането с дробни производни. Основен инструмент на дробното диференциране е Гама функцията, формулирана за пръв път през 18 век. След тази първа дефиниция, гама функцията е преформулирана много пъти от учени като Гаус, Вайерщрас, Лежандр и др. В съвременния си вид, Гама функцията е формулирана от Лежандр :

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} \mathrm{dx} \tag{1}$$

където $z \in C$. Гама функцията има някои интересни свойства:

$$n! = \Gamma(n+1)$$
$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

Гама функцията има множество приложения, сред които в квантовата физика, астрофизиката, статистиката и др. Едно от приложенията на Гама функцията е в дефиницията на функцията на Миттаг – Леффлер :

$$E_{(\alpha,\beta)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \tag{2}$$

Функцията на Миттаг-Леффлер е специална комплексна функция, която зависи от 2 параметъра. За α, β > 0 и α, β e R, функцията е сходяща. Специален случай е

$$E_{(1,1)}(z) = \sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mathrm{k}+1)} = \sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty} \frac{z^k}{\mathrm{к}!} = \exp(z)\,, \tag{3}$$

което е тейлъровият ред на експоненциалната функция. Функцията на Митаг-Лефлер има широка употреба в дробното диференциално смятане, като възниква естествено в решения на диференциални уравнения.

II. Обзор на диференцирането от дробен ред

През годините различни учени са давали различни дефиниции за производна от дробен ред. По-надолу са дадени няколко популярни дефиниции. Във всички изброени дефиниции $\alpha \in R$ е редът на производната.

Дефиниция на Риман – Лиувил:

$$\cdot_{\alpha}\mathrm{Df}(t) = \frac{d^n}{\mathrm{dt}^n} I_t^{n-\alpha} f(t)\,, \tag{4}$$

където d/dt е диференциален оператор, *I* е оператор за интегриране, $n = \lceil \alpha \rceil$ е най-**близкото цяло число, по-голямо от** $\boldsymbol{\alpha}$**.**

Дефиниция на Капуто:

$$\cdot_{c}\mathrm{Df}(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} \mathrm{d\tau} \tag{5}$$

Дефиниция на Капуто – Фабрицио:

$$\cdot_0^{\mathrm{CF}} D_t^{\alpha}\big(f(t)\big) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^t f\,'(t) \exp\left[-\alpha \frac{t-x}{1-\alpha}\right] \mathrm{dx}\,, \tag{6}$$

където M(0)=M(1)=1 е нормализираща функция.

Дефиниция на Атангана – Балеану в смисъла на Риман – Лиувил:

$$\cdot_a^{\mathrm{ABR}} D_t^{\alpha} f(t) = \frac{\mathrm{AB}(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^t f\,'(\tau) E_{\alpha}\left(-\alpha \frac{(t-\tau)^{\alpha}}{1-\alpha}\right) \mathrm{d\tau} \tag{7}$$

Дефиниция на Атангана – Балеану в смисъла на Капуто:

$$\cdot_a^{\mathrm{ABC}} D_t^{\alpha} f(t) = \frac{\mathrm{AB}(\alpha)}{1-\alpha} \frac{d}{\mathrm{dt}} \int_a^t f\,(\tau) E_{\alpha}\left(-\alpha \frac{(t-\tau)^{\alpha}}{1-\alpha}\right) \mathrm{d\tau} \tag{8}$$

Лява производна на Грунвалд – Летников:

$$\cdot_{\mathrm{GL}} D(t) = \lim_{h\to\infty, \mathrm{Nh}=\mathrm{t}-a} h^{-\alpha} \sum_{\mathrm{j}=0}^{N} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-\mathrm{jh}) \tag{9}$$

Дясна производна на Грунвалд – Летников:

$$\cdot_{\mathrm{GL}} D(t) = \lim_{h\to\infty, \mathrm{Nh}=\mathrm{b}-t} h^{-\alpha} \sum_{\mathrm{j}=0}^{N} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(\mathrm{t}+\mathrm{jh}) \tag{10}$$

Дефиниция на Рийсз:

$$ {}_{\mathrm{RZ}}D_t^{\alpha} f(t)=\mathrm{c}_{\alpha}\left({}_{\mathrm{RL}}D_{\mathrm{a,t}}^{\alpha} f(t)+{}_{\mathrm{RL}}D_{\mathrm{t,b}}^{\alpha} f(t)\right) \quad (11) $$

Разликата между дефинициите в смисъла на Риман-Лиувил и Капуто се състои в реда на интегриране и диференциране – при Риман-Лиувил първо по ред се изпълнява интегрирането, при Капуто – диференцирането. Редът на изпълнение на операторите променя изчисленията, за това изброените производни не съвпадат. Въпреки, че горните дефиниции не са еквивалентни, може да се определят връзките между тях. Един пример е връзката между производните на Риман-Лиувил и Капуто [6]:

$$ {}_{\mathrm{RL}}D_{\mathrm{a,t}}^{\alpha} f(t)\, {}_{C}D_{\mathrm{a,t}}^{\alpha} f(t)+\sum_{\mathrm{k}=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(\mathrm{k}+1-\alpha)} \quad (12) $$

Към момента няма дефиниция, която да се е наложила окончателно като единствена, но традиционно в литературата преобладава употребата на производна на Капуто, което се дължи на няколко причини:

1) производната на Капуто от първи ред на функцията *y=const* е *0*. Това не важи за дефиницията на Риман-Лиувил

2) в практиката най-често производната на Капуто се оказва консистентна с измерени резултати

Тейлъровият ред на функция, дефиниран чрез производна на Капуто, се дава с формулата :

$$ f(x)=\sum_{\mathrm{k}=0}^{m-1} D^{k} \frac{f(a)}{\mathrm{k!}}(x-a)^{k}+\mathrm{J}_{a}^{n} D_{a}^{n} f(x), \quad (13) $$

където *J* е интегрален оператор. Трансформацията на Лаплас за производна на Капуто:

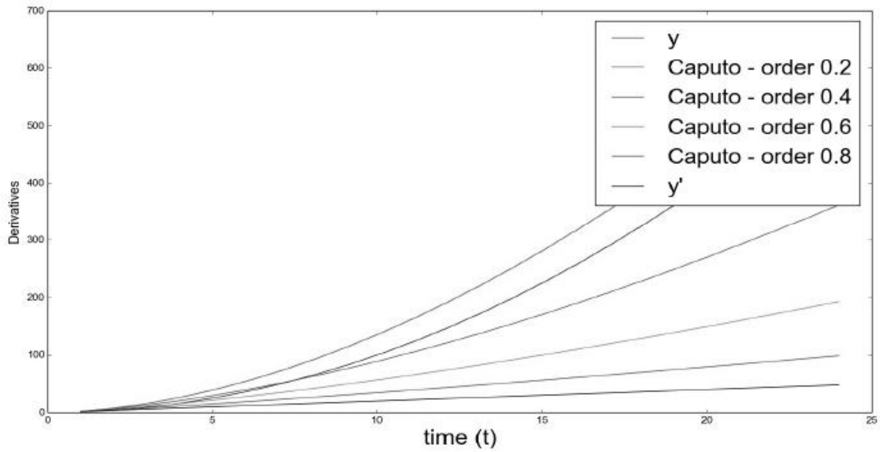
$$ \int_0^{\infty} e^{-\mathrm{st}} f_t^{\alpha}(t)\mathrm{dt}=\mathrm{s}^{\alpha} F(\alpha)-\sum_{\mathrm{k}=0}^{n-1} s^{k}\left[D^{\alpha-k-1} f(t)\right]_{\mathrm{t}=0},(n-1-\alpha<\alpha<\mathrm{n}) \quad (14) $$

По-долу са посочени аналитичните формули на производна от ред 0.5 в смисъла на Капуто за някои функции.

$$ \mathrm{y=x}, {}_{C}D^{0.5}\mathrm{x}=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} $$

$$ \mathrm{y}=\mathrm{E}_{\alpha}(\lambda\mathrm{x}^{\alpha}), {}_{C}\, D^{\alpha} E_{\alpha}(\lambda\mathrm{x}^{\alpha})=\lambda\mathrm{E}_{\alpha}(\lambda\mathrm{x}^{\alpha}), $$

където *E (x)* е функцията на Миттаг-Лефлер. Последното уравнение е обобщение на производната $\left(e^{\lambda\mathrm{x}}\right)'=\lambda\mathrm{e}^{\lambda\mathrm{x}}$



Фиг. 1. Производни на Капуто за квадратната функция при различен ред

От графиките за квадратната функция ясно се вижда, че при $\alpha \to 0$ и $\alpha \to 1$, дробните производни се доближават до целочислените производни от съответните редове.

Освен споменатите дефиниции, в литературата могат да се срещнат множество алтернативи, които обаче не се радват на същия интерес. В списъка по-долу са изброени някои от тях, по името на авторите с оригинален правопис:

Sonin–Letnikov, Hadamard, Marchaud, Riesz, Riesz–Miller, Miller–Ross, Weyl, Erdélyi–Kober, Machado, Chen–Machado, Coimbra, Katugampola, Caputo–Katugampola, Caputo–Katugampola , Hilfer, Hilfer-Katugampola, Davidson, Chen, Pichaghchi

За дефинициите на дробни производни при дробно *α*, правилото на Лайбниц за диференциране на произведение на функции не важи.

$$ {}_{\cdot C}D_a^n[\mathrm{fg}](x) = \frac{(x-a)^{-n}}{\Gamma(1-n)} g(a)\big(f(x)-f(a)\big) + \big({}_{\cdot C}D^{\alpha} g(x)\big) f(x) + \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} \binom{n}{k} \Big(J^{k-n} g(x)\Big) D^k f(x) \quad (15) $$

Що се касае до правилото за диференциране на композитни функции, през годините са давани различни дефиниции, които обаче не изглежда да са универсални. През 2015 в [15] се дава дефиниция за производна, дефинирана с крайни разлики:

$$ \frac{\partial^{\alpha}\mathrm{y}}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial^{\alpha}\mathrm{y}}{\partial u^{\alpha}} \frac{\partial^{\alpha} u}{\partial x^{\alpha}} = \left(\frac{f(u)}{u}\right)^{1-\alpha} \mathrm{f}'(u) \left(\frac{g(x)}{x}\right)^{1-\alpha} \mathrm{g}'(x) \quad (16) $$

В статията е дадено доказателство и примери. В горната дефиниция означенията имат следното значение:

Нека е дадена функция *y=f(g(x)) = f°g (x)*. Полагаме *u = g(x)* и съответно получаваме *y=f(u)*. Тази формула при α=1 е еквивалентна на класическата формула

$$ \frac{\partial f}{\partial x} = \mathrm{f}'(x)\mathrm{g}'(x) \quad (17) $$

Това правило не е консистентно с дробната производна на Капуто.

В последното десетилетие интерес привлича и концепцията за производна от разпределен ред, където се изчислява интегралът от множество дробни производни, чиито редове са стойности от разпределение.

Дефининиция (производна от разпределен ред в смисъла на Капуто):

$$D^{b(\alpha)}f(t) = \int_0^1 b\,(\alpha)f(t)\mathrm{d}\alpha$$

(18)

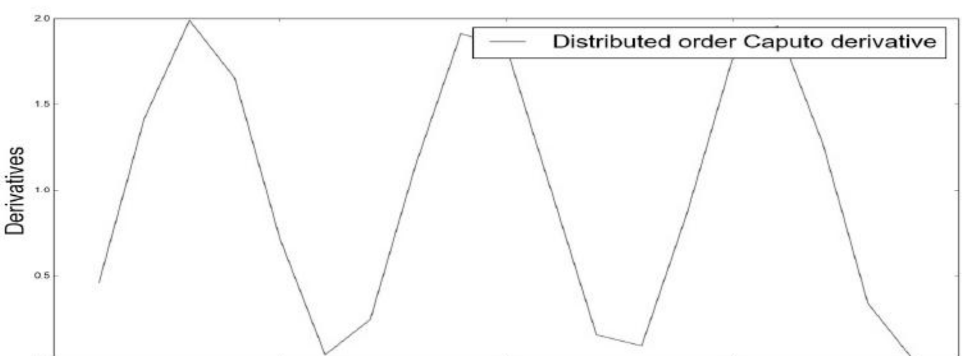
Съществуват и дефиниции за производни от променлив ред.

Дефиниция (производна от променлив ред в смисъла на Капуто):

$$\cdot{}_a^C D_t^{\alpha(t)} f(t)\, {}_a^C D_t^{\alpha(t)}\big(f(t) - f(a)\big) = \frac{1}{\Gamma\big(1-\alpha(t)\big)} \frac{d}{\mathrm{dt}} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha(t)}\,[f(\tau) - f(a)]\mathrm{d}\tau \qquad (19)$$

Таблица 1. Стойности на разпределени производни с разпределение Heaviside(x)

x	D ***x***	D ***x^2***	D ***x^3***	D ***sin(x)***
1	0.5	0.3333333333333333	0.25	0.45969769413186023
2	2.0	2.6666666666666665	4.0	1.4161468365471424
3	4.5	9.0	20.25	1.9899924966004454
4	8.0	21.333333333333332	64.0	1.6536436208636118
5	12.5	41.666666666666664	156.25	0.7163378145367738



Фиг.2. Производна от разпределен ред за функцията y=sin(x), разпределение Heaviside(x)

III. Диференциални уравнения от дробен ред - сравнение на числени методи

Една от основните разлики между ОДУ и уравненията от дробен ред е, че вторите са нелокални – при дадени начални условия е необходимо да знаем предишни стойности на производните и частните решения, за да намерим аналитичните решения. Това се интерпретира като памет на системите, описвани с такива уравнения, и дава по-голяма експресивност на този вид модели [12]. В практиката с такива уравнения успешно са моделирани множество физични феномени като вискоеластичност [13], вископластичност, дифузия и др. Възможно е използването на множество компоненти от дробен ред, което дефинира т.нар. многочленни уравнения (multi-term equations), като е възможно и обобшение – уравнения от разпределен ред. В литературата се разглеждат и уравнения от променлив ред. Единично уравнение от дробен ред се дефинира в общ вид по следния начин:

$$D^{\alpha}y(t)=\mathrm{f}\big(\mathrm{t},y(t)\big), \tag{20}$$

с начални условия $y^{(k)}(0) = y_0^{(k)}$, $k = 0,1,\dots,m-1$, където $0<\alpha<m$. Линейно уравнение от вида $._0^C D^{\alpha}\mathrm{y}=\mathrm{ay}$ има аналитично решение $\mathrm{y}=\mathrm{E}_{\alpha}(\mathrm{at}^{\alpha})$, където *E(x)* е функцията на Миттаг – Лефлер при фиксирано $\beta=1$.

Съществуват множество числени методи за решаване на дробни диференциални уравнения. Методът Предиктор – Коректор (П-К) се състои в комбинирането на два числени метода за решаване на диференциални уравнения. Единият метод дава приближение на следващата стойност (точка) от решението; след това тази стойност се използва като входна за другия метод, който дава по-точно приближение. Нека е дадено диференциално уравнение от вида (1). Тогава, за метода на Ойлер и обратния метод на Ойлер, П-К методъта целочислени уравнения изглежда така:

$$P{:}\ y_{\mathrm{n+1}}^{[0]}=\mathrm{y}_n+\mathrm{hf}_n$$

$$E{:}\ f_{\mathrm{n+1}}^{[0]}=\mathrm{f}\left(x_{\mathrm{n+1}},\mathrm{y}_{\mathrm{n+1}}^{[0]}\right)$$

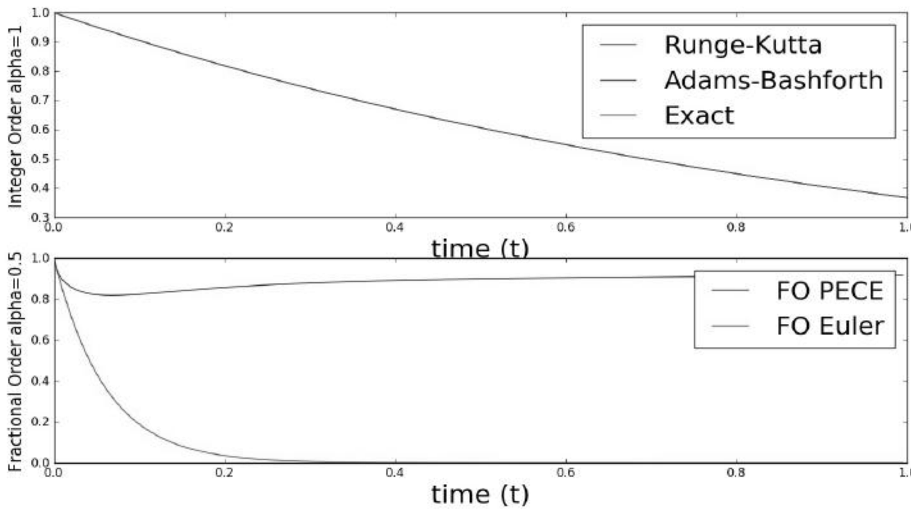
$$C{:}\ y_{\mathrm{n+1}}^{[1]}=\mathrm{y}_{\mathrm{n+1}}^{[0]}=\mathrm{y}_n+\mathrm{hf}_{\mathrm{n+1}}^{[0]}$$

$$E{:}\ f_{\mathrm{n+1}}=\mathrm{f}\left(x_{\mathrm{n+1}},\mathrm{y}_{\mathrm{n+1}}^{[1]}\right)$$

P обозначава стъпката „предсказване“, *E* обозначава изчисляването на стойност-та на дясната част за следващата точка от решението, използвайки дадения метод, *C* обозначава стъпката „корекция“, която се прави чрез втория избран метод, използвайки предишната стойност на решението и стойността на дясната част на уравнението, изчислена на предишната стъпка на предишния метод. Налице е изискването двата метода да са от един и същи ред. Съществуват различни варианти за избор на предиктор и коректор, като най-популярни са методите на Адамс-Башфорт и Адамс-Мултън, съответно.

Таблица 2. Решения на уравнението *Dx=-x*, начално условие *x(0)=1*

x	PECE	FO Euler	Exact
0	1.0	1.0	1.0
1	0.33618586978772091	0.040850650761850599	0.427583576156
2	0.5376624899006357	0.0016687756676666849	0.336204002446
3	0.62109273750486604	6.8170571999725843e-05	0.287341249533
4	0.66506287103123896	2.7848122289963927e-06	0.255395676311
5	0.69315332845849831	1.1376139180406238e-07	0.232326294376



Фиг. 3. Частни решения на уравнението *Dx=-x,* производна на Капуто, ред 0.5

IV. Приложения на пресмятането с дробни производни

Изчисленията с дробни производни намират много широко приложение в практиката, в широк спектър от дисциплини. Една от областите, където в последно време се използват дробни производни, е моделирането на потоци и дисперсия. През 2014 Атангана и колеги формулират обобщена версия на закона на Дарси и заедно със споменатото уравнение за консервация на масата го използват за нова формулировка на уравнението за подземни потоци. Атангана и Кликман формулират уравнение от променлив дробен ред за адвекционна дисперсия. С уравнения от дробен ред също се моделират пространствено-времеви дифузионни процеси и вискоеластичност.

Уравненията от дробен ред намират приложения и в информатиката. С такива уравнения могат да се конструират PID контролери. Използването на дробен ред при интегрирането и диференцирането в тези контролери увеличава тяхната степен на свобода. Друго приложение в информатиката на производните от дробен ред е в цикличните невронни мрежи. Различни видове невронни мрежи, като например клетъчни, на Хопфийлд, асоциативни памети и др. могат да се моделират чрез дробни диференциални уравнения. Предимството на тези невронни мрежи е, че имат неограничена памет и по-строга устойчивост. Към момента дробните невронни мрежи са само теоретична концепция, но дават заявка за обещаващи приложения в бъдеще. Разработени са и техники за спускане по градиента от дробен ред [3]. Клетъчна невронна мрежа от дробен ред с производна на Капуто:

$$ {}_{t0}^{C}D_t^{\alpha} x(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{\mathrm{j}=1}^{n} a_{\mathrm{ij}}\, f_j x_j(t) \tag{21} $$

Множество автори са изследвалиустойчивост на такива мрежи [14][16]-[18]. Освен приложенията в информатиката, в квантовата физика представлява интерес и дробният вариант на уравнението на Шрьодингер [5].

Интересна публикация, свързана с дробното диференциално смятане е [7], където чрез дробни диференциални уравнения се описва процеса на адаптация на неврони към бавно променящи се стимули. Авторите конструират уравнението:

$$r(t)=\mathrm{kh}(t)*x(t)+\mathrm{r}_0, \tag{22}$$

където *r(t)* е функцията на активиране на невроните (*firing rate*), *x(t)* е входната информация (стимул), която варира във времето, *h(t)* е дробният филтър, приложен върху входната информация, а *k* и *r* са константи, отразяващи увеличнието на филтъра и средната стойност на невронната активация съответно. Знакът * обозначава конволюция. Уравненията показват линейна зависимост между входната информация и невронната активация [7]. Важно последствие от дробния характер на описваните уравнения е че, за разлика от целочисленото диференциране, дробното не е локално т.е. промените (в случая промените в невронната активация) зависят от историята на предишните състояния. Изложените в цитираната статия данни водят до предположението, че единични неврони са способни да реагират бързо на резки промени, докато средната величина на невронната активация се адаптира към бавни промени в статистиката на входния поток, което е механизъм за кодиране на допълнителна информация относно стимулите [7]. Горнотото съждение означава, че невронните мрежи в някои части на мозъка кодират едновременно различни времеви скали при отразяването на входната информация [7]. Разглежданата публикация не е единствената, където е констатирана динамика от дробен ред в работата на неврони. Анастасио през 1994 предлага модел от дробен ред за описване на вестибуло-очния Рефлекс[8];

V. Обобщение на резултатите

1) И при двата метода грешката расте с отдалечаване от началното условие, макар и не винаги пропорционално на увеличението на стойностите

2) Намалението на изчислителната стъпка намалява грешката драстично и при двата метода

3) Положителният ефект от намаляването на изчислителната стъпка се увеличава с отдалечване от началното условие

4) Алгоритъмът Предиктор-Коректор е по-чувствителен към намаляването на изчислителната стъпка

5) При по-малка изчислителна стъпка и в интервал, близък до началното условие, методът на Ойлер може да произведе резултати със сходна или по-малка грешка от Предиктор- Коректор метода

6) При ред, близък до целочисления, грешката е драстично по-малка и при двата метода

7) При ред, далечен от целочислени, П-К методът дава по-малка грешка

8) При ред, близък до целочисления, Методът на Ойлер дава по-малка грешка

9) Нито един от двата алгоритъма няма универсално предимство т.е. изискванията на проблема определят кой метод да бъде използван

10) Когато решаваният проблем налага изискване за изчислителна ефективност, методът Предиктор – Коректор е препоръчителен, тъй като при по-малка изчислителна стъпка, съответно по-малък брой итерации, дава по-точно приближение

11) Когато решаваният проблем изисква по-голяма точност, независимо от използвания изчислителен ресурс, методът на Ойлер дава по-добри резултати при помалка изчислителна стъпка

12) Методът Предиктор-Коректор не е подходящ за нелинейни уравнения

13) Методът Предиктор-Коректор е по-подходящ за по-малък ред на уравненията, а методът на Ойлер – за по-голям

14) Двата метода имат сходна грешка близко до началното условие, но с отдалечаване от него, разликата между двата се задълбочава

15) За целочислен ред и двата метода дават еднакви резултати

За провеждането на експериментите са използвани авторски кодове на Python. В публикацията са поместени само малка част от резултатите от експериментите с цел прегледност.

Благодарности

Авторът изказва благодарности на своите научни ръководители доц.д.м.н. И. Стамова и доц. д-р П. Георгиева

Литература

1. Loverro, A. Fractional Calculus: History, Definitions and Applications for the Engineer, 2004.
2. Kiryakova, V., A Brief Story About The operators Of The Generalized Fractional calculus, *Fractional Calculus and Applied analysis*, 2008.
3. Pu,Y.F. Ji-Liu Zhou, J.L., Zhang,Y., Zhang, N., Huang, G., Siarry, P., Fractional Extreme Value Adaptive Training Method: Fractional Steepest Descent Approach, IEEE, 2015.
4. GÖKÇEN, M., Non-Integer Order Derivatives, Thesis, Graduated School of Engineering and Science of Izmir Institute of Technology 2007.
5. Adda, F., Jacky Cresson, J., Fractional differential equations and the Shrodinger equation, *Applied Mathematics and Computatio*n, 2005.
6. LI, C., ZENG,F., Finite Difference methods for fractional differential equations, 2011.
7. Lundstrom, B.N., Higgs,M.H., Spain, W.J., Fairhall, A.L., Fractional differentiation by neocortical pyramidal neurons, 2008.
8. Anastasio, T.., The fractional-order dynamics of brainstem vestibulo-oculomotor neurons, 1994.
9. Drew P., Abbott L., Models and properties of power-law adaptation in neural systems., 2006.
10. Rubayyi T. Alqahtani, Atangana-Baleanu derivative with fractional order applied to the model of groundwater within an unconfined aquifer
11. Al-Salti,N., Karimov, E., Sadarangani, K., On a Differential Equation with Caputo-Fabrizio Fractional Derivative of Order $1< \beta \leq 2$ and Application to Mass-Spring-Damper System, Progress in Fractional Differentiation and Applications, 2016.
12. John T. Edwards, J., Ford, N.J., A. Simpson, C., The numerical solution of linear multi-term fractional differential equations: systems of equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2002.
13. Torvik, P.J., Bagley, R.L., On the Appearance of the Fractional Derivative in the Behavior of Real Materials, *Journal of Applied Mechanic*s, 1984.
14. Stamova, I., Global Mittag-Leffler stability and synchronization of impulsive fractional-order neural networks with time-varying delays, Nonlinear Dynamics, An International Journal of Nonlinear Dynamics and Chaos in Engineering Systems, 2013.
15. Ali Karci, Chain Rule for Fractional Order Derivatives, Science Innovation, 2015.
16. Zhang, S., Yu, Y., Yu, J.LMI Conditions for Global Stability of Fractional-Order Neural Networks, *IEEE Transactions on Neural Neural Networks*, 2017.
17. Ran-Chao, W., Finite-Time Stability of Fractional-Order Neural Networks with Delay, 2017.
18. Wu, A., Liu, L. Huang, T. , Zeng, Z. , Mittag-Leffler stability of fractional-order neural networks in the presence of generalized piecewise constant arguments, 2017.