КАЧЕСТВЕН АНАЛИЗ НА ИМПУЛСНИ ФУНКЦИОНАЛНО ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Доц. дмн Иванка Милкова Стамова
Бургаски Свободен Университет

QUALITATIVE ANALYSIS OF IMPULSIVE FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS AND APPLICATIONS

Ivanka Milkova Stamova

***Abstract*:** *In this paper the main results of the author on stability and boundedness theory for impulsive functional differential equations by means of the second method of Lyapunov are presented. The results provide a unified general structure applicable to study the dynamics of mathematical models based on such equations.*

Key words: *Impulsive functional differential equations, Stability, Applications*

1. Увод

Теорията на импулсните обикновени диференциални уравнения бележи началото си от 1960 година с работата на В.Д. Мильман и А.Д. Мышкис [7]. В тази работа са дадени някои общи съображения за системи с импулси и са получени първите резултати по устойчивост. Следва интензивно развитие на теорията на импулсните диференциални уравнения [1, 6, 9].

Импулсните функционално-диференциални уравнения са естествено обобщение на импулсните обикновени диференциални уравнения. Необходимостта от изучаването им се дължи на факта, че те са полезни математически средства при описването на много процеси и явления изучавани в теорията на оптималния контрол, биология, механика, биотехнология, медицина, електроника, радиотехника, теория на контрола, икономика и т.н. , които се характеризират със скокообразно изменящо се състояние и зависимост от предисторията на процеса.

Следващият пример дава по- конкретна представа за такива процеси.

Пример. Леон Чуа и Лин Янг [4, 5] дефинират математически модел на клетъчна невронна мрежа като обширна нелинейна аналогова верига, която произвежда сигнали в реално време.

Невронните мрежи притежават някои ключови свойства и имат важни приложения в такива области като сигнални процеси, отразени процеси, разпознаване на образи и др. Големите възможности за приложение обуславят интензивното развитие на теорията на клетъчните невронни мрежи в последните няколко години .

От съществено значение е изучаването на невронни мрежи със закъсняващ аргумент. Отчитането на миналите състояния на процесите, протичащи в невронната мрежа, е важно за техните приложения.

Разглеждаме клетъчна невронна мрежи със зависещи от времето закъснения:

$$\dot{x}_i(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} f_j(x_j(t - \tau_j(t))) + I_i, \tag{1.1}$$

където $i = 1, 2, ..., n$; n е броят на елементите в невронната мрежа; $x_i(t)$ е състоянието на $i-$тия елемент (неврон) в момента от време t; $f_j(x_j(t))$ е активационната функция на j-тия елемент; a_{ij}, b_{ij}, I_i и c_i са константи; a_{ij} е теглото на $j-$тия елемент, което определя значимостта му относно $i-$тия елемент в момента t; b_{ij} е теглото на $j-$тия елемент, което определя значимостта му относно $i-$тия елемент в момента $t - \tau_j(t)$; I_i описва външното отклонение на $i-$тия елемент; $\tau_j(t)$ е трансмисионното закъснение на състоянието на $j-$тия елемент и удовлетворява условието $0 \le \tau_j(t) \le \tau$ ($\tau = const$); c_i са константи, които характеризират нивото след което $i-$тия елемент ще постави своя потенциал в следващо състояние на изолация, в което е изключен от мрежата и от външния източник.

Глобалната екпоненциална устойчивост на системата (1.1) е изследвана в [2, 3, 8].

Невронните мрежи често са обект на кратковременни смущения в определени моменти от време, поради които те претърпяват бързи изменения. При математическото моделиране на такива невронни мрежи времетраенето на тези бързи смени се пренебрегва и се предполага, че процесът се изменя скокообразно. Бързите изменения могат да се дължат на променливи превключвания, внезапни шумове, електрически импулси при придвижване по мрежата и др.

Ако в резултат на импулсно въздействие в момента t_k състоянието на $i-$тия елемент на невронната мрежа е изменено, то адекватен матема-тически модел на разглеждания по-горе процес ще бъде импулсното функционално-диференциално уравнение с променливо закъснение

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = -c_i x_i(t) + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij} f_j(x_j(t - \tau_j(t))) + I_i, \; t \ne t_k, \\ x_i(t_k^+) = x_i(t_k) + P_{ik}(x_i(t_k)), \quad k = 1, 2, ..., \end{cases} \tag{1.2}$$

където $i = 1, 2, ..., n$, $n \ge 2$, $t \in R$, $x_i(t_k)$ описва състоянието на $i-$тия елемент преди импулсно въздействие в момента от време t_k, а $x_i(t_k^+)$ описва състоянието на $i-$тия елемент след импулсно въздействие в момента от време t_k, P_{ik} са функции, които характеризират изменението на състоянието на $i-$тия елемент в момента от време t_k.

С помощта на модел от вида (1.2) могат да се изследват въпросите за оптимално управление и синхронизация на тези системи. Импулсите в случая играят ролята на контрол.

В разгледаните примери математическите модели, базирани на импулсни функционално-диференциални уравнения, се задават с помощта на функционално-диференциални уравнения и условия за скок. В зависимост от типа на функционално-диференциалните уравнения се определя и типът на импулсните функционално-диференциални уравнения.

Моментите на импулсно въздействие могат да бъдат избирани по различен начин. Следните два начина на избор представляват практически интерес:

А) Моментите t_k са фиксирани предварително.

Б) Моментите на импулсно въздействие настъпват, когато числеността удовлетворява дадена релация. В този случай моментите на импулсно въздействие зависят от решението на уравнението. Системите уравнения от този клас са по-труден обект за изучаване. Част от трудностите при такива системи са свързани с възможността за сливане на решения след импулс, възможността за загуба на решения, възможността за "биене" на решение и др. [1, 6].

Ефективното приложение на импулсните диференциално-диференчни уравнения изисква намирането на критерии за устойчивост на техните решения [10, 11].

Целта на този доклад е да се представят основни резултати на автора по устойчивост на решенията на импулсните функционално-диференциални уравнения. Резултатите са получени с помощта на обобщение на втория метод на Ляпунов и техника на Разумихин. Разгледани са и приложения на получените критерии за устойчивост.

2. Предварителни бележки и дефиниции

Нека R^n е n - мерното Евклидово пространство с елементи $x = (x_1, x_2, \dots x_n)^T$ и норма $\| x \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$. Нека $R_+ = [0, \infty)$, $R = (-\infty, +\infty)$, $t_0 \in R$, $\Omega \subseteq R^n$ е област, съдържаща началото и $PC\big[[t_0, \infty), R^n\big] = \{x : [t_0, \infty) \to R^n : x$ е частично непрекъсната функция в (t_0, ∞) с точки на прекъсване от първи род $t_1, t_2, \dots$, в които е непрекъсната отляво $\}$.

Разглеждаме системата

$$(2.1) \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t), & t \neq t_k, \\ x(t_k + 0) = x(t_k) + I_k(x(t_k)), & k = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

където $t > t_0$, $f : (t_0, \infty) \times PC[[-r, 0], \Omega] \to R^n$; $I_k : \Omega \to R^n$, $k = 1, 2, \dots$, $t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots$ и $\lim_{k \to \infty} t_k = \infty$ и за $t > t_0$, $x_t \in PC[[-r, 0], \Omega]$ е дефинирано от $x_t(s) = x(t + s), \ -r \le s \le 0$.

Въвеждаме следните означения:

$K = \{a \in C[R_+, R_+] : a(r)$ е строго растяща и $a(0) = 0 \}$,

$G_k = \{(t, x) \in (t_0, \infty) \times \Omega : t_{k-1} < t < t_k \}$, $k = 1, 2, \dots$, $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$.

$\| \varphi \|_r = \sup_{t \in [t_0 - r, t_0]} \| \varphi(t - t_0) \|$ е нормата на функцията $\varphi \in PC[[-r, 0], \Omega]$.

В случая $r = \infty$ имаме $\| \varphi \|_r = \| \varphi \|_\infty = \sup_{t \in (-\infty, t_0]} \| \varphi(t - t_0) \|$.

Въвеждаме класът V_0 от всички функции $V:[t_0,\infty)\times\Omega\to R$, които са непрекъснати и локално Липшицови по втория си аргумент при $t\neq t_k, k=1,2,...$ и за които съществуват и са крайни границите

$$\lim_{t\to t_k, t<t_k} V(t,x)=V(t_k-0,x), \qquad \lim_{t\to t_k, t>t_k} V(t,x)=V(t_k+0,x)$$

и е в сила равенството $V(t_k,x)=V(t_k-0,x)$ при всяко $k=1,2,...$

За $t\neq t_k, k=1,2,...$ и $V\in V_0$ дефинираме

$$D^+V(t,x(t))=\limsup_{h\to 0^+}\frac{1}{h}[V(t+h,x(t+h))-V(t,x(t))].$$

Въвеждаме следните условия:

H2.1. Функцията f е непрекъсната при $t\neq t_k, k=1,2,...$

H2.2. Функцията f е Липшицова по втория си аргумент в $(t_0,\infty)\times PC[[-r,0],\Omega]$ равномерно по $t\in(t_0,\infty)$.

H2.3. $f(t,0)=0$ за $t\in[t_0,\infty)$.

H2.4. $I_k\in C[\Omega,R^n]$ и $I_k(0)=0,\ \ k=1,2,...$

H2.5. $(E+I_k):\Omega\to\Omega,\ \ k=1,2,...,$ където E е идентитетът в Ω.

H2.6. $t_0<t_1<...<t_i<t_{i+1}<...$ и $\lim_{i\to\infty} t_i=\infty$

В следващите резултати ще използваме класът V_0 от функции, за които е изпълнено условието

H2.7. $V(t,0)=0$, $t\geq t_0$

и следния класе от функции:

$$\Omega_1=\{p\in PC[[t_0,\infty),\Omega]: V(s,x(s))\leq V(t,x(t)),\ t-\tau\leq s\leq t,\ t\geq t_0\}.$$

3. Основни резултати

3.1. Устойчивост и асимптотическа устойчивост

Нека $\varphi_1\in PC[[-r,0],\Omega]$. Означаваме с $x^*(t)=x^*(t;t_0,\varphi_1)$ решението на система (2.1), което удовлетворява началните условия

$$\begin{cases} x^*(t)=\varphi_1(t-t_0),\ \ t\in[t_0-r,t_0], \\ \quad x^*(t_0+0)=\varphi_1(0). \end{cases}$$

Дефиниция 3.1. Решението $x^*(t)$ на система (2.1) се нарича:

(а) *устойчиво*, ако

$(\forall t_0\in R)$ $(\forall\varepsilon>0)$ $(\exists\delta=\delta(t_0,\varepsilon)>0)$ $(\forall\varphi_0\in PC[[-r,0],\Omega]: \|\varphi_0-\varphi_1\|_r<\delta)$

$\|x(t;t_0,\varphi_0)-x^*(t;t_0,\varphi_1)\|<\varepsilon$;

(б) *равномерно устойчиво*, ако числото δ от (а) може да се избере независимо от $t_0\in R$;

(в) *привличащо*, ако $\lim_{t\to\infty} x(t;t_0,\varphi_0)=x^*(t;t_0,\varphi_1)$;

(г) *равномерно привличащо*, ако

$(\exists\lambda>0)$ $(\forall\varepsilon>0)$ $(\exists T=T(\varepsilon)>0)$ $(\forall\varphi_0\in PC[[-r,0],\Omega]: \|\varphi_0-\varphi_1\|_r<\lambda)$

$$(\forall t_0 \in R)\ (\forall t \geq t_0 + T): \quad \| x(t;t_0,\varphi_0) - x^*(t;t_0,\varphi_1) \| < \varepsilon \ ;$$

(д) *асимптотически устойчиво*, ако то е устойчиво и привличащо;

(е) *равномерно асимптотически устойчиво*, ако то е равномерно устойчиво и равномерно привличащо.

Теорема 3.1. *Нека са изпълнени следните условия:*

1. *Изпълнени са условията H2.1- H2.7.*
2. *Функциите* $V \in V_0$ *и* $a \in K$ *са такива, че*

$$V(t, x^*(t)) = 0\,,\ t \in [t_0, \infty)\,,$$

$$a(\| x - x^*(t) \|) \leq V(t,x), \qquad (t,x) \in [t_0, \infty) \times \Omega\,.$$

3. *Неравенството*

$$D^+V(t, x(t)) \leq 0\,, \qquad t \neq t_k\,,\ k = 1,2,...$$

е изпълнено при $t \in [t_0, \infty)$, $x \in \Omega_1$ *и* $V \in V_0$.

4. $V(t+0, x + I_k(x)) \leq V(t,x)$, $x \in \Omega$, $t = t_k$, $k = 1,2,...$, $V \in V_0$.

Тогава решението $x^*(t)$ *на система (2.1) е устойчиво.*

Теорема 3.2. *Нека са изпълнени следните условия:*

1. *Изпълнени са условия 1 и 4 на теорема 3.1.*
2. *Функциите* $V \in V_0$ *и* $a, b \in K$ *са такива, че*

$$V(t, x^*(t)) = 0\,,\ t \in [t_0, \infty)\,,$$

$$a(\| x - x^*(t) \|) \leq V(t,x) \leq b(\| x - x^*(t) \|)\,, \quad (t,x) \in [t_0, \infty) \times \Omega\,.$$

3. *Неравенството*

$$D^+V(t, x(t)) \leq -c(\| x(t) - x^*(t) \|)\,, \qquad t \neq t_k\,,\ k = 1,2,...$$

е изпълнено при $t \in [t_0, \infty)$, $x \in \Omega_1$, $V \in V_0$ *и* $c \in K$.

Тогава решението $x^*(t)$ *на система* (2.1) *е равномерно асимптотически устойчиво.*

3.2. Глобална устойчивост

В този параграф ще приложим директния метод на Ляпунов за изследване на устойчивостта на решенията на система (2.1) при $\Omega \equiv R^n$, т.е. разглеждаме системата

$$(3.1) \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t),\ t \neq t_k\,,\ t > t_0\,, \\ \Delta x(t_k) = x(t_k + 0) - x(t_k) = I_k(x(t_k)), \quad t_k > t_0\,,\ k = 1,2,..., \end{cases}$$

където $f : (t_0, \infty) \times PC[[-r,0], R^n] \to R^n$, $I_k : R^n \to R^n$, $k = 1,2,...$, $t_0 < t_1 < ... < t_k < t_{k+1} < ...$, $\lim_{k \to \infty} t_k = \infty$.

Нека $\varphi_0 \in PC[[-r,0], R^n]$. Означаваме с $x(t) = x(t; t_0, \varphi_0)$ решението на система (3.1), което удовлетворява начални условия

$$\begin{cases} x(t) = \varphi_0(t - t_0), \ t \in [t_0 - r, t_0], \\ x(t_0 + 0) = \varphi_0(0)\,. \end{cases}$$

Дефиниция 3.2. Решението $x(t)$ на система (3.1) се нарича *глобално експоненциално устойчиво*, ако

$$(\exists c > 0)\ (\forall \alpha > 0)\ (\exists \gamma = \gamma(\alpha) > 0)\ \ (\forall t_0 \in R)$$
$$(\forall \varphi_0 \in PC[[-r,0], R^n] : \| \varphi_0 - \varphi_1 \|_r < \alpha)\ (\forall t > t_0):$$
$$\| x(t;t_0,\varphi_0) - x^*(t;t_0,\varphi_1) \| < \gamma(\alpha)\ \|\varphi_0 - \varphi_1\|_r\ \exp[-c(t-t_0)].$$

Теорема 3.3. *Нека са изпълнени следните условия:*

1. Изпълнени са условия Н2.1-Н2.4, Н2.6 и Н2.7 при $\Omega \equiv R^n$

2. Функцията $V \in V_0$ *е такава, че за всяко* $\alpha > 0$ *съществува* $\gamma = \gamma(\alpha) > 0$*, такова че*

$$\| x(t) - x^* \| \le V(t,x) \le \gamma(\alpha) \| x(t) - x^* \|, \qquad (t,x) \in [t_0,\infty) \times R^n .$$

3. Неравенството

$$D^+ V(t, x(t)) \le -c\ V(t, x(t)), \qquad t \ne t_k,\ k = 1,2,\ldots,$$

е валидно за $t \ge t_0$, $x \in \Omega_1$, $c > 0$.

Тогава решението $x(t)$ *на система (3.1) е глобално експоненциално устойчиво.*

3.3. Практическа устойчивост

Въвеждаме следната дефиниция за практическа устойчивост на система (2.1).

Дефиниция 3.3. Система (2.1) се нарича:

(а) *практически устойчива* по отношение на (λ, A), ако за фиксирано $t_0 \in R$ и за всяка наредена двойка (λ, A) такава, че $0 < \lambda < A$ от $\| \varphi_0 \|_r < \lambda$ следва $\| x(t;t_0,\varphi_0) \| < A$ при $t > t_0$.

(б) *равномерно практически устойчива* по отношение на (λ, A), ако (а) е валидно за всяко $t_0 \in R$.

(в) *асимптотически практически устойчива* по отношение на (λ, A), ако е практически устойчива по отношение на (λ, A) и $\lim_{t\to\infty} \| x(t;t_0,\varphi_0) \| = 0$.

Съвместно със система (2.1) ще разглеждаме системата

$$\text{(3.2)} \qquad \begin{cases} \dot u(t) = F(t, u(t)), & t \ne t_k,\ t > t_0, \\ \Delta u(t_k) = J_k(u(t_k)), & t_k > t_0, \end{cases}$$

където $F : (t_0,\infty) \times R_+^m \to R^m$, $J_k : R_+^m \to R^m$, $k = 1,2,\ldots$.

Нека $u_0 \in R_+^m$. Означаваме с $u(t) = u(t;t_0,u_0)$ решението на система (3.2), което удовлетворява началното условие $u(t_0 + 0;t_0,u_0) = u_0$, а с $J^+(t_0,u_0)$ означаваме максималния интервал от типа $[t_0,\beta)$, в който е дефинирано решението $u(t;t_0,u_0)$.

Основните резултати в този параграф са получени с помощта на частично непрекъснати векторни функции на Ляпунов $V : [t_0,\infty) \times \Omega \to R_+^m$, $V = col(V_1, V_2, \ldots, V_m)$ такива, че $V_j \in V_0$, $j = 1,2,\ldots, m$ и чрез сравнителният метод.

Теорема 3.4. *Нека са изпълнени следните условия:*

1. *Изпълнени са условията Н2.1- Н2.7.*

2. $0 < \lambda < A$ *и* $S_A \subset \Omega$.

3. $F(t,0) = 0, \quad t \in (t_0, \infty)$.

4. $J_k(0) = 0, k = 1,2,\ldots$.

5. Функциите $a, b \in K$ *са такива, че*

$$a(\| x \|) \le L_0(t,x) \le b(\| x \|), \qquad (t,x) \in [t_0, \infty) \times S_A,$$

където $L_0(t,x) = \sum_{i=1}^{m} V_i(t,x)$.

6. $b(\lambda) < a(A)$.

Тогава от практическата устойчивост (равномерната практическа устой-чивост, асимптотическата практическа устойчивост) на система (3.2) по отношение на $(b(\lambda), a(A))$ *следва практическата устойчивост (равномерната практическа устойчивост, асимптотическата практическа устойчивост) на система (2.1) по отношение на* (λ, A).

4. Приложения

Разглеждаме системата с импулсно въздействие във фиксирани моменти от време

$$\text{(4.1)} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -3x_1(t) + f_1(x_1(t)) + f_2(x_2(t)) \\ \quad + 0{,}9 f_1(x_1(t - \tau_1(t))) - 0{,}8 f_2(x_2(t - \tau_2(t))) + 1, \ t \ne t_k, \\ \dot{x}_1(t) = -3x_2(t) - f_1(x_1(t)) + f_2(x_2(t)) \\ -0{,}05 f_1(x_1(t - \tau_1(t))) + 0{,}15 f_2(x_2(t - \tau_2(t))) + 0{,}99999996, \quad t \ne t_k, \\ x_1(t_k^{\,+}) = x_1(t_k) - \gamma_{1k}(x_1(t_k) - 0{,}9131403), \qquad k = 1,2,\ldots \\ x_2(t_k^{\,+}) = x_2(t_k) - \gamma_{2k}(x_2(t_k) - 0{,}0222717), \qquad k = 1,2,\ldots \end{cases}$$

където $0 < t_1 < t_2 < \ldots t_k < t_{k+1} < \ldots$ и $\lim_{k \to \infty} t_k = \infty$.

С непосредствена проверка установяваме, че точката

$$\text{(4.2)} \qquad \left(x_1^{\,*}, x_2^{\,*}\right) = (0{,}9131403,\ 0{,}0222717)$$

е константно решение за система (4.1). Освен това , ако $0 < \gamma_{ik} < 2$ за всички $i = 1,2$ и $k = 1,2,\ldots$, то за тази система са изпълнени всички условия на Теорема 3.3. Следователно решението (4.2) е глобално експоненциално устойчиво.

Ако в система (4.1) импулсните смущения са такива, че $\gamma_{ik} \ge 2$ или $\gamma_{ik} \le 0$ за всички $i = 1,2$ и $k = 1,2,\ldots$, то точката (4.2) е отново равновесно положение, но не можем да направим заключение за неговата глобална експоненциална устойчивост.

Примера показва, че с помощта на подходящи импулсни смущения ние можем да контролираме устойчивостта на невронната мрежа.

Литература

1. D. D. Bainov, P. S. Simeonov, Systems with Impulse Effect: Stability, Theory and Applications,Ellis Horwood, Chichester, 1989.
2. J. Cao, On stability of delayed cellular neural networks, Physics Letters A, 261 (1999), 303-308.

3. J. Cao, On stability of cellular neural networks with delay, IEEE Trans. Circuits Syst. I, 40 (1993), 157-165.
4. L. O. Chua, L. Yang, Cellular neural networks: Theory, IEEE Trans. Circuits Syst. CAS, 35 (1988), 1257-1272.
5. L. O. Chua, L. Yang, Cellular neural networks: Applications, IEEE Trans. Circuits Syst. CAS, 35 (1988), 1273-1290.
6. V. Lakshmikantham, D. D. Bainov and P. S. Simeonov, Theory of Impulsive Differential Equations, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, 1989.
7. V. D. Mil'man and A. D. Myshkis, On the stability of motion in the presence of impulses, Siberian Mathematical Journal, 1 (1960), 233-237 (in Russian).
8. T. Roska, C. W. Wu, M. Balsi and L. O. Chua, Stability and dynamics of delay-type general cellular neural networks, IEEE Trans. Circuits Syst. I 39 (1992), 487-490.
9. A. M. Samoilenko and N. A. Perestyuk, Differential Equations with Impulse Effect, Visca Skola, Kiev, 1987 (in Russian).
10. I. M . Stamova, I.M., Stability Analysis of Impulsive Functional Differential Equations, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2009
11. I. M . Stamova, Vector Lyapunov functions for practical stability of nonlinear impulsive functional differential equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 325 (2007), 612-623