

# ЕКВИДИСТАНТИ НА СФЕРИЧНИ ЦИКЛОИДИ

доц. д-р инж. Радостин Долчинков, гл.ас. Пенка Георгиева

## EQUIDISTANTS TO SPHERICAL CYCLOIDS

Ass. prof. Radostin Dolchinkov, PhD

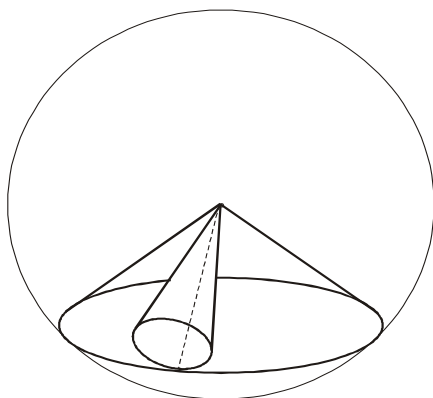
Prof. ass. Penka Georgieva

**Abstract:** Plane cycloids can be obtained from two rolling in cylinders with parallel axes. If these cylinders are transformed to tangential cones with coincident vertexes the plane cycloids become space cycloids. The mathematical description of the movement of a rolling cone over a static cone can be presented by matrix calculations or by transformations of an initial coordinate system, which is connected with the static cone. The obtained curve is a spherical cycloid. The application of the spherical cycloids is closely connected with the description of their equidistants. In this paper the mathematical models of spherical cycloids and their equidistants is derived by transformations of the initial coordinate system. Examples for equidistants of different types of space cycloids are obtained and shown.

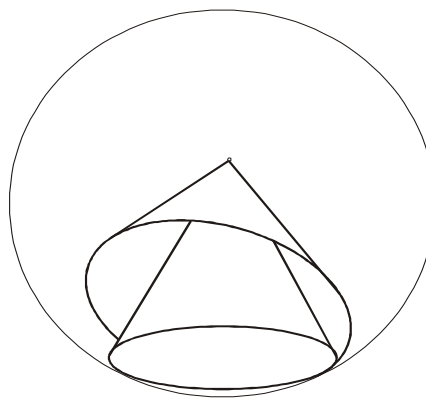
При отъркаване на два допиращи се конуса с общ връх се получава пространствена сферична циклоида. Конусите са съответно неподвижен (основен) конус и подвижен (начален) конус и техните оси се пресичат в една обща точка (общия им връх). При различни параметри на конусите се получават различни видове циклоиди.

В зависимост от параметрите на разглежданите конуси и начина, по който те се допират, върху сферата се получават различни видове циклоиди.

- **сферична епициклоида:** началният конус се отъркава върху друг конус (фиг. 1).
- **сферична хипоциклоида:** началният конус се отъркава в друг конус (фиг. 2).
- **сферична ортоциклоида:** особен случай на сферичната епициклоида.
- **сферична ортоциклоида:** особен случай на сферичната епициклоида.
- **сферична еволвента:** особен случай на сферичната епициклоида.



Фигура 1. При отъркаване на началния конус върху основния конус се получава сферична епициклоида

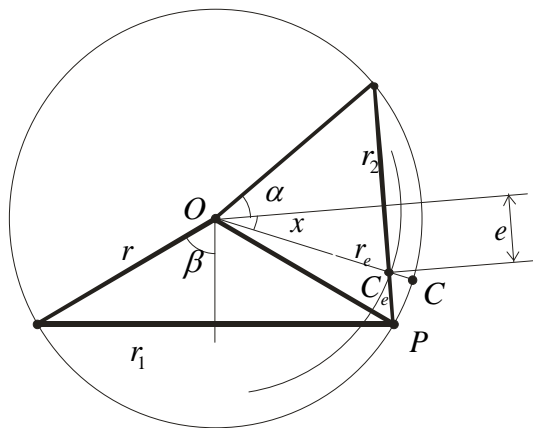


Фигура 2. При отъркаване на началния конус в основния конус се получава сферична хипоциклоида

Както при равнинните циклоиди и тук съществува следното разделение [17]

- заострена сферична циклоида;
- скъсена сферична циклоида;
- удължена сферична циклоида.

Предмет на настоящата работа е



Фигура 3. Параметри на сферичната циклоида

Нека са зададени два конуса: неподвижен (основен) и подвижен, който се отъркава върху неподвижния (фиг. 1). Сферична циклоида се определя еднозначно със следните параметри:

$r$  - радиус на сферата (образуващата на конусите);

$\alpha$  - ъгъл между образуващата и оста на подвижния конус,

$\beta$  - ъгъл между образуващата и оста на неподвижния конус,

$x$  - ъгъл между оста на подвижния конус и лъча от върха през произвеждащата точка  $C$  (фиг. 3).

Тогава за разстоянието от  $O$  до пресечната точка  $C_e$  на  $OC$  с основата на неподвижния конус е в сила  $OC_e = r_e = \frac{r \cdot \cos \alpha}{\cos x}$ . Ексцентричността  $e = r \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} x$  показва големината на удължението, необходимо за проектиране на циклоидата върху повърхнината на сферата.

При проектиране на пространствени зъбни предавки важен параметър е броят  $N$  на зъбите, т.е. броят на получените сферични циклоидни клонове. Този брой трябва да бъде естествено число, а за да бъде изпълнено това условие, между ъглите  $\alpha$  и  $\beta$  трябва да

съществува следната зависимост:  $\alpha = \arcsin\left(\frac{\sin \beta}{N}\right)$ .

Условието за търкаляне е да има равенство на описаните от двата конуса дъги:

$$r_1 \cdot \varphi_1 = r_2 \cdot \varphi_2,$$

където  $r_1 = r \cdot \sin \beta$  - радиус на неподвижния конус,

$r_2 = r \cdot \sin \alpha$  е радиус на подвижния конус,

$\varphi_1$  - мярка на дъгата на завъртане върху неподвижния конус;

$\varphi_2$  - мярка на дъгата на завъртане върху подвижния конус.

Координатите на контактната за основите на двата конуса точка  $P$  удовлетворяват следните равенства:

$$\begin{aligned} X_P &= r \cdot \sin\beta \cdot \cos\varphi_1 \\ Y_P &= r \cdot \sin\beta \cdot \sin\varphi_1 \\ Z_P &= -r \cdot \cos\beta. \end{aligned}$$

За координатите  $X_{C_e}$ ,  $Y_{C_e}$ ,  $Z_{C_e}$  на произвеждащата точка  $C_e$  се получават следните равенства:

$$\begin{aligned} X_{C_e} &= r \cdot \sin\beta \cdot \cos\varphi_1 + (r \cdot \sin\alpha - e \cdot \cos\varphi_2) \cdot \cos(\alpha + \beta) \cdot \cos\varphi_1 + e \cdot \sin\varphi_2 \cdot \sin\varphi_1 \\ Y_{C_e} &= r \cdot \sin\beta \cdot \sin\varphi_1 + (r \cdot \sin\alpha - e \cdot \cos\varphi_2) \cdot \cos(\alpha + \beta) \cdot \sin\varphi_1 - e \cdot \sin\varphi_2 \cdot \sin\varphi_1 \\ Z_{C_e} &= r \cdot \sin\beta \cdot \sin\varphi_1 + (r \cdot \sin\alpha - e \cdot \cos\varphi_2) \cdot \cos(\alpha + \beta) \cdot \sin\varphi_1 - e \cdot \sin\varphi_2 \cdot \cos\varphi_1 \end{aligned}$$

Проектирането на пространствени зъбни предавки е пряко свързано с получаването на подходящи сферични циклоиди. Математическото описание на такива криви, се реализира в програмната среда MATLAB, което позволява ефективност при експериментирането.

При анализиране на получените варианти, се вижда, че те могат да се групират, в зависимост от изменението на основните параметри на сферичните циклоиди.

При промяна на параметъра  $\beta$  - ъгълът между образуващата и оста на неподвижния конус се сменя вида на сферичната циклоида – епициклоида, ортоциклоида и хипоциклоида [17]

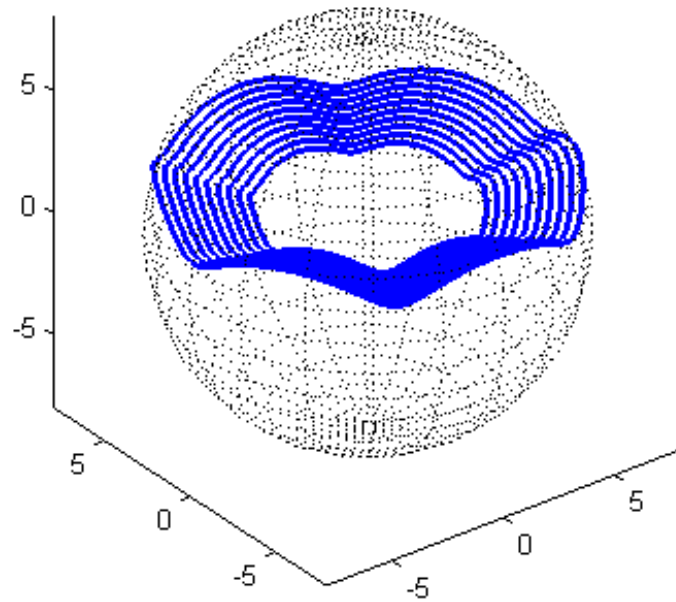
При изменение на отношението  $\frac{x}{\alpha}$  в интервала  $(0; +\infty)$ , се променя характера на кривата – от скъсена през заострена до удължена.

Гладка крива се получава в случая  $\frac{x}{\alpha} \in (0; 1)$ , т.е. за  $\alpha > x$ .

Заострена крива се получава за  $\frac{x}{\alpha} = 1$  т.е. за  $\alpha = x$ .

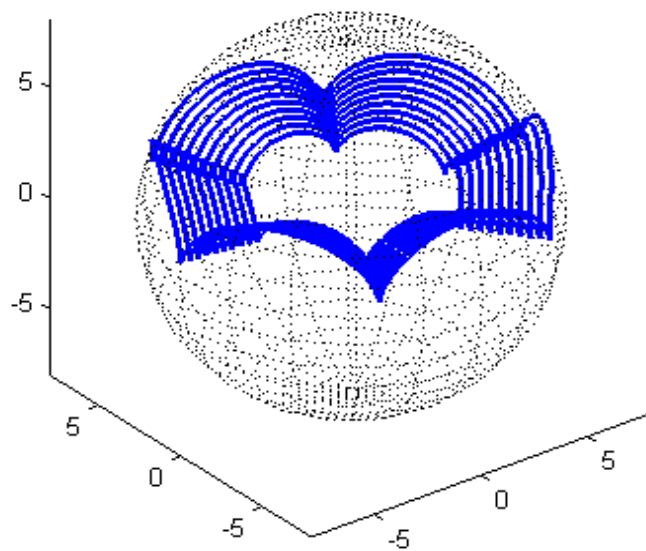
Крива с примки се получава при  $\frac{x}{\alpha} \in (1; +\infty)$ , т.е. за  $\alpha < x$ .

При  $\beta = 95^\circ$ ,  $\frac{x}{\alpha} = 0,4$  и  $N = 6$  се получава скъсена сферична епициклоида. На фигура 4 са показани фамилия от скъсени сферични епициклоиди.



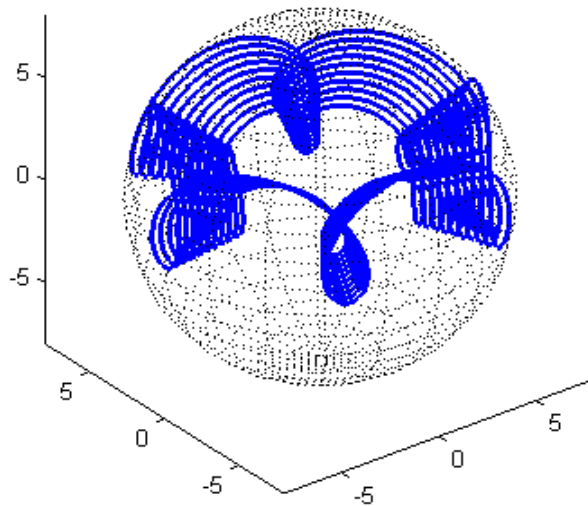
Фигура 4. Фамилия от скъсени сферични епициклоиди

При  $\beta = 95^\circ$ ,  $\frac{x}{\alpha} = 1$  и  $N = 6$  се получава заострена сферична епициклоида. На фигура 5 са показани фамилия от заострени сферични епициклоиди.



Фигура 5. Фамилия от заострени сферични епициклоиди

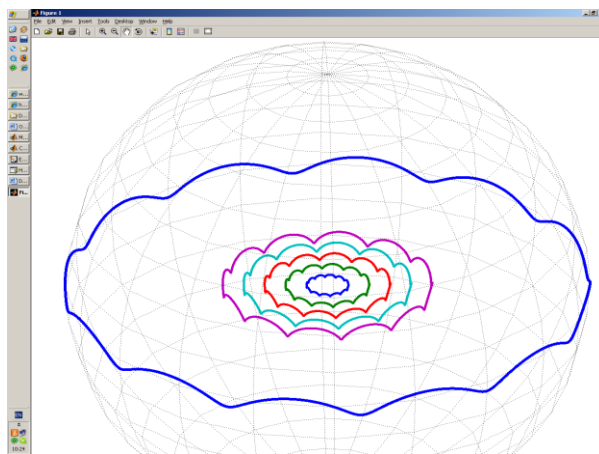
При  $\beta = 95^\circ$ ,  $\frac{x}{\alpha} = 1,4$  и  $N = 6$  се получава удължена сферична епициклоида. На фигура 6 са показани фамилия от удължени сферични епициклоиди.



Фигура 6. Фамилия от удължени сферични епициклоиди

До сега при математическото представяне на сферичните циклоиди се приемаше, че произвеждащата точка  $C_e$  се намира в равнината на началната окръжност. Но в действителност образуващата се крива не лежи върху повърхността на сферата, а във или извън сферата. Тази грешка може да се коригира лесно чрез уголемяване или намаляване на базовата сфера

След коригиране на радиуса с коефициента  $\frac{\cos x}{\cos \alpha}$  се получава подобна на предните крива, но описана върху сферата ( фиг 7).



Фигура 7. Скъсени сферични епициклоиди след коригиране на радиуса при  $\beta = 85^\circ$ ,  $\frac{x}{\alpha} = 0,45$  и  $N = 12$ .

Практически интерес представляват технологичните криви, т.е случая, когато се получават гладки криви. От разгледаните случаи[17] са кривите – сферична скъсена епициклоида, сферична скъсена ортоциклоида и сферична скъсена хипоциклоида.

Приложението на равнинните циклоиди в зъбните предавки намират смисъл в използването на техните еквилианти. Същото важи и за пространствените сферични циклоиди.

За получаване на еквилиантни криви, лъчът през произвеждащата точка  $C$  се уголемява до конус с ъгъл  $\tau$  между образуващата и оста. Тогава еквилиантната се получава по сфера с радиус  $\bar{r} = r \cdot \cos \tau$ . Този радиус се коригира също с множител  $\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha}$  с цел получаване на еквилиантите върху първоначалната сфера.

Радиусът на конуса е  $q = r \cdot \sin \tau$ .

Нека  $Q$  е точката, описваща еквилиантната крива. Тогава нейните координати  $X_Q, Y_Q, Z_Q$  могат да бъдат получени след трансляция и две ротации на първоначалната координатна система.

Транслацията преобразува първоначалната координатна система  $Oxyz$  до координатна система с начало т.  $C$  и координатни оси успоредни на осите на  $Oxyz$ .

Това се получава с използването на вектор на трансляция  $\overline{OC} = (x_c; y_c; z_c)$ .

Получената координатна система ще означим с  $\overline{\overline{Cxyz}}$ .

Следващото преобразование на координатната система има за цел апликатната ос да съвпадне с лъча  $OC^{\rightarrow}$ . Ето защо ъгълът на ротацията е равен на ъгъла между оста

$Oz$  и лъча  $OC^{\rightarrow}$ . Нека този ъгъл е равен на  $\lambda = \arccos \frac{z_c}{r}$ . След приложената

ротация координатната система  $\overline{\overline{Cxyz}}$  се преобразува до координатна система  $\overline{\overline{\overline{Cxyz}}}$  с начало  $C$ , оси  $\overline{\overline{Cx}}$  и  $\overline{\overline{Cy}}$  съответно успоредни на осите  $Ox$  и  $Oy$ , а оста  $\overline{\overline{Cz}}$  съвпада с лъча  $OC^{\rightarrow}$ .

Втората ротация има ъгъл на ротация лъча  $\mu$ , който е ъгълът между проекцията на  $OC^{\rightarrow}$  върху координатната равнина  $Oxy$  и оста  $Ox$ , т.е.

$\mu = \arcsin \left( \frac{x_c}{\sqrt{x_c^2 + y_c^2}} \right)$ . Така се получава координатна система  $\overline{\overline{\overline{CXYZ}}}$ , в която

точка  $Q$  се пресмята по формулите:

$$X_Q = X_C + \eta_Q \cdot \cos \lambda \cdot \sin \mu - \xi_Q \cdot \cos \mu;$$

$$Y_Q = Y_C + \eta_Q \cdot \cos \lambda \cdot \cos \mu + \xi_Q \cdot \sin \mu;$$

$$Z_Q = Z_C - \eta_Q \cdot \sin \lambda,$$

където:

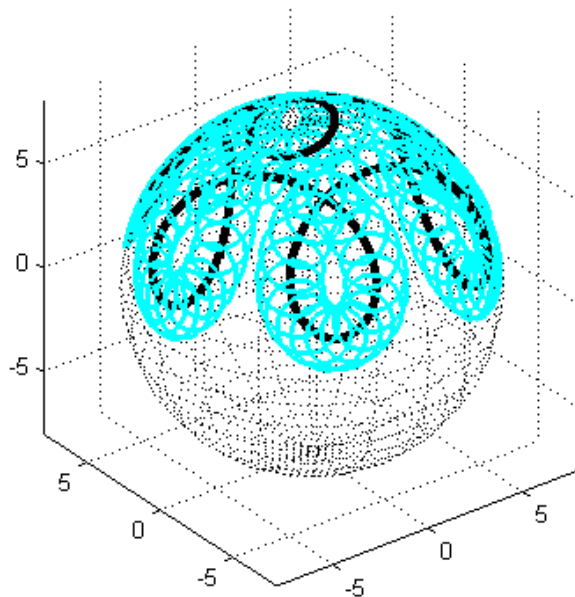
$$\begin{aligned}\xi_Q &= r \cdot \sin \tau \cdot \sin(\nu + \varphi_2) \\ \eta_Q &= -r \cdot \sin \tau \cdot \cos(\nu + \varphi_2)\end{aligned}$$

са координатите на  $Q$  в тангенциалната равнина в т.  $C$  към сферата с радиус  $\bar{r}$  при  $\nu = \arcsin \frac{\sin \varphi_2 \cdot \sin \alpha}{\sin \gamma}$  за  $\gamma = \arccos(\cos \alpha \cdot \cos x + \sin \alpha \cdot \sin x \cdot \cos \varphi_2)$ .

За получаване на еквилистенни криви по първоначалната сфера се прави корекция на радиуса с множител  $\frac{\cos x}{\cos \alpha}$ , т.е.

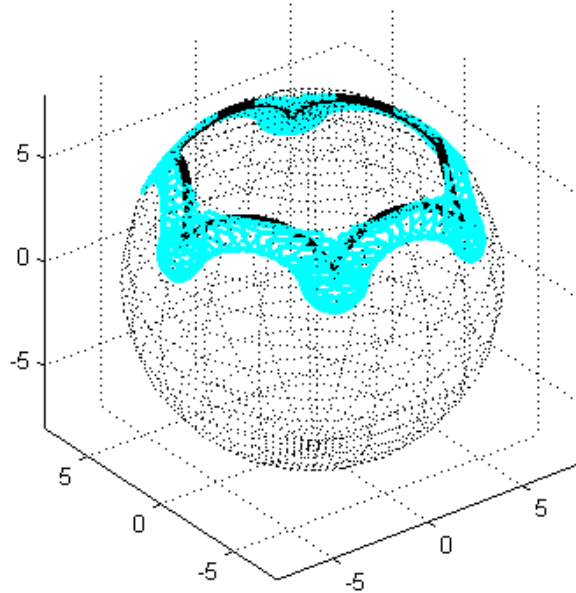
$$r_{korr} = r \cdot \frac{\cos x}{\cos \alpha} = \frac{r \cdot \cos \tau \cdot \cos x}{\cos \alpha}.$$

От фиг. 8 до фиг. 16 са показани еквилистенни криви на различни видове сферични циклоиди.



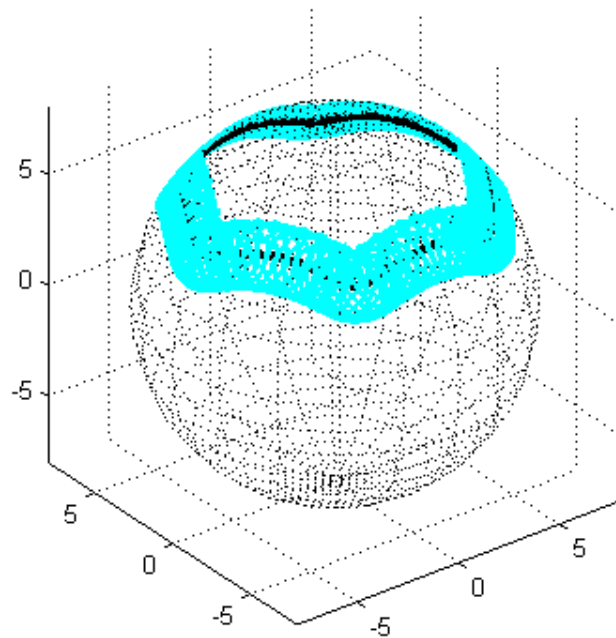
$$\tau = 10^\circ; \frac{x}{\alpha} = 3; z = 6; \beta = 120^\circ$$

Фигура 8. Еквилистенни криви на удължена сферична циклоида



$$\tau = 10^\circ; \frac{x}{\alpha} = 1; z = 6; \beta = 120^\circ$$

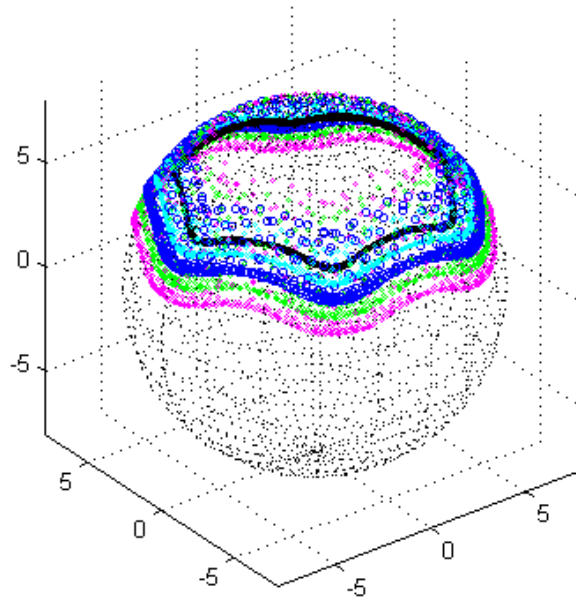
Фигура 9. Еквидистантни криви за заострена сферична циклоида



$$\tau = 10^\circ; \frac{x}{\alpha} = 0.4; z = 6; \beta = 120^\circ$$

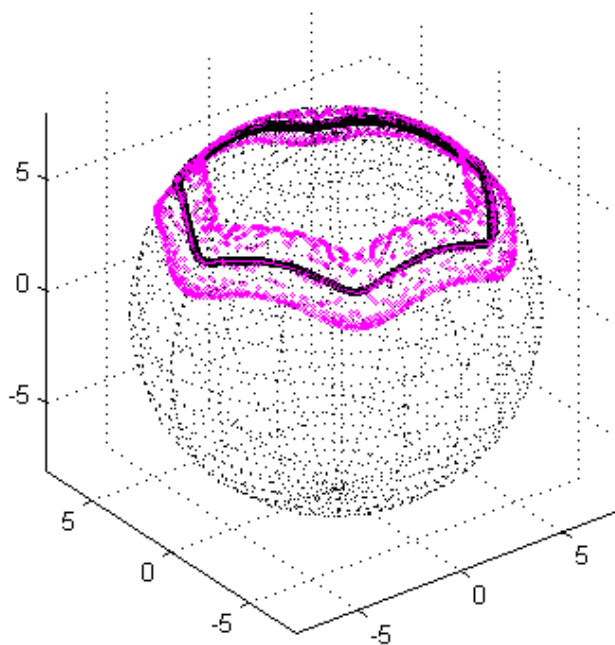
Фигура 10. Еквидистантни криви за скъсена сферична циклоида





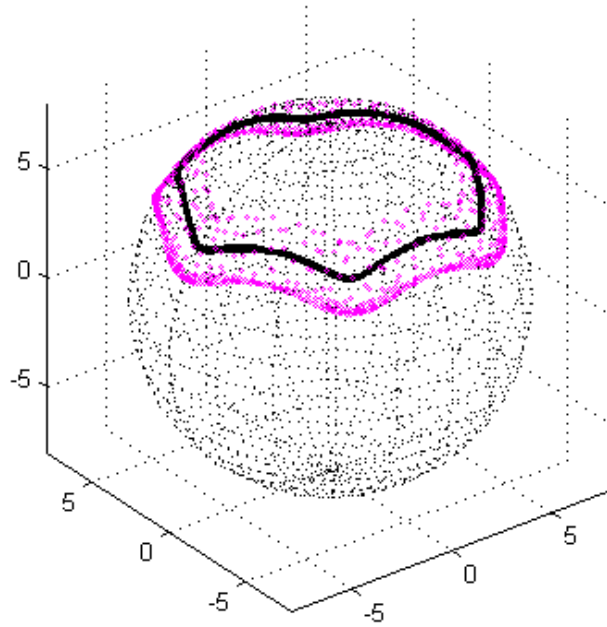
$\tau = 0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ; \frac{x}{\alpha} = 0.4; z = 6; \beta = 120^\circ$

Фигура 11. Еквидистантни криви за скъсена сферична циклоида при различно  $\tau$



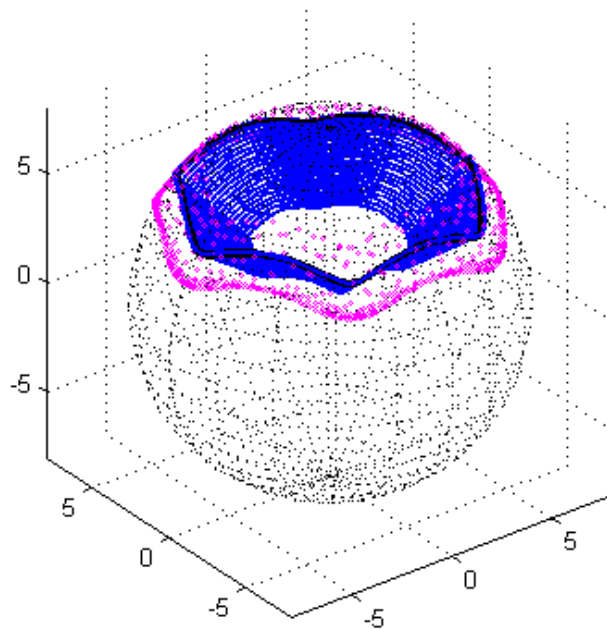
$\tau = -10^\circ, 0^\circ, 10^\circ; \frac{x}{\alpha} = 0.4; z = 6; \beta = 120^\circ$

Фигура 12. Вътрешна и външна еквидистанта на скъсена сферична циклоида



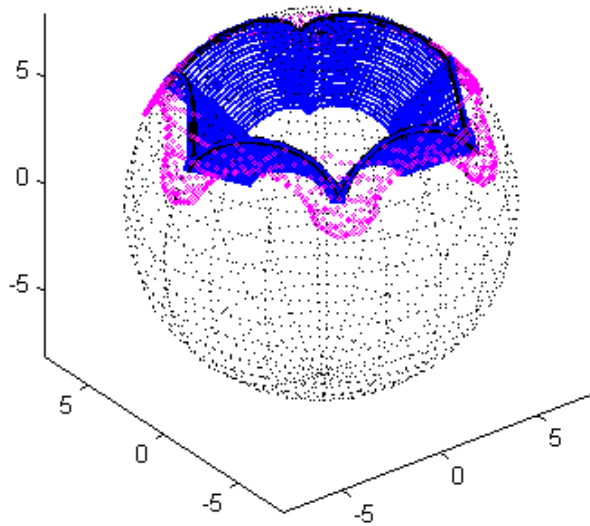
$$\tau = 10^\circ; \frac{x}{\alpha} = 0.4; z = 6; \beta = 120^\circ$$

Фигура 13. Еквидистантни криви за скъсена сферична циклоида



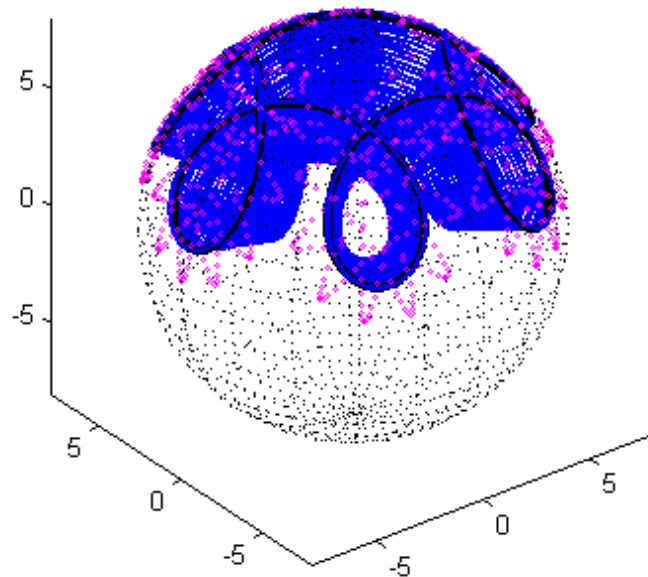
$$\tau = 10^\circ; \frac{x}{\alpha} = 0.4; z = 6; \beta = 120^\circ$$

Фигура 14. Еквидистантни криви на фамилия скъсени сферични циклоиди



$$\tau = 10^\circ; \frac{x}{a} = 1; z = 6; \beta = 120^\circ$$

Фигура 15. Еквидистантни криви на фамилия заострени циклоиди



$$\tau = 10^\circ; \frac{x}{a} = 3; z = 6; \beta = 120^\circ$$

Фигура 16. Еквидистантни криви на фамилия удължени сферични циклоиди

### Литература:

- [1] АЛИПИЕВ О.Л., *Геометрия и формообразоване на епи- и хипоциклоидни кола от коригирани циклопредавки*, Докторска дисертация, Русе, 1988.
- [2] БИРЮКОВ Б.Н., *Роторно-поршневые гидравлические машины*, М., Машиностроение, 1972.
- [3] ВАКАРИН В.А., А.К. Соловьев, *Трохоидная передача*, АС на СССР №783526, F 16 H 1/28.
- [4] КОФФМАН К., *Дифференциал Джолли*, "Автомобильная промышленность-США", №6, 1989.
- [5] ЛИТВИН Ф.Л., *Теория зубчатых зацеплений*, М., Наука, 1968.
- [6] ЛОБАСТОВ В. К., БАХТЮКОВ В.М., ПАРАДЕЕВ В.Д., *К расчету бипланетарных исполнительных механизмов для воспроизведения циклоидальных кривых, приближающихся к логарифмическим спиралям*, "Механика механизмов и машин", 1979, № 48.
- [7] ЛОБАСТОВ В. К., БАХТЮКОВ В.М., ПАРАДЕЕВ В.Д., *К расчету бипланетарных исполнительных механизмов для воспроизведения циклоидальных кривых, приближающихся к логарифмическим спиралям*, "Механика механизмов и машин", 1979, № 48.
- [8] BASEDOW G., *Planetengetriebe mit Exzenter*, T echnika, №15/16, Schweisstechnik, 1983.
- [9] KUNAD G., J.Schroder, *Hochübersetzendes kombiniertes Keten-Kurven-Getriebe*, Maschinenbautechnik, Berlin, №2, 1986.
- [10] LEHMAN M., *Die Beschreibung der Zykloiden, ihrer Aquidistanten und Hullkurven*, Munchen, 1981.
- [11] LEHMANN M., *Polarkoordinaten-Mesmaschine*, "Feinwerktechnik- Messtechnik" 87, №5, 1979.
- [12] PEIJ S., *Cycloidal equidistant curved gear transmission mechanism and its device*, US Patent №4922781, 1990, F16H 55/06.
- [13] PIERAT M. A., *Counterweight for orbital drive mechanism*, United States Patent №4,524,644, F16H 1/28, Jun. 25, 1985.
- [14] DOLCHINKOV R.S., *Profiling of gear-cutting wheels for profile wheel processing of cyclo-transmission with two meshing lines*, Mechanical systems and elements research and development, IRMES'95, Nis, Yugoslavia, 1995.
- [15] DOLCHINKOV R.S., *Shaping of tooth cutting tools for profile wheels with external teeth and two mes lines*, International congress – Gear transmissions'95, Sofia, Bulgaria, 1995.
- [16] ДОЛЧИНКОВ, Р., *Геометрия и формообразоване на профилни зъбни кола от коригирани цикло-предавки.*, Автореферат на докторска дисертация, Бургас, 2001 г., 41 .
- [17] ДОЛЧИНКОВ Р., ГЕОРГИЕВА П., *Математически модел на конусовидни циклоиди от пространствени зъбни предавки*, Международна конференция по общо машиностроително конструиране, 15-16 Октомври, 2009 г. , Русе
- [18] SUMITOMO, *Machinery Corporation of America*. Catalog 2001 – Speed Reducers and Gearmotors №04.301.50.08.
- [19] *CYCLE-Getrieben*, Lorenz Braren GmbH, Catalog.