ДИЗАЙН И ИМПУЛСНИ ЕФЕКТИ ВЪРХУ УСТОЙЧИВОСТТА НА НЕВРОННИ МРЕЖИ СЪС СУПРЕМУМИ

Доц. дмн Иванка Милкова Стамова
Бургаски Свободен Университет,
Траян Ганев Стамов
Технически Университет-София

DESIGN AND IMPULSIVE EFFECTS ON THE STABILITY OF NEURAL NETWORKS WITH SUPREMUMS

Ivanka Milkova Stamova
Trayan Ganev Stamov

Abstract: *In this paper impulsive differential equations with supremums are used as an apparatus for modeling processes in neural networks. The design and impulsive effects on the stability are investigated. The results provide a unified general structure applicable to study the dynamics of mathematical models based on such equations.*

Key words: *Neural networks; Design; Impulses; Stability*

1. Увод

Леон Чуа и Лин Янг [1, 2] дефинират математически модел на клетъчна невронна мрежа като обширна нелинейна аналогова верига, която произвежда сигнали в реално време.

Невронните мрежи притежават някои ключови свойства и имат важни приложения в такива области на инженерния дизайн като разпознаване на образи, оптимизационни задачи и др. Целта на оптимизационните задачи в инженерния дизайн е да се гарантира качеството, изпълнението, действието, цената на продукта през фазата на дизайн. Например, в [3] авторите предлагат алгоритъм за намиране на оптимално решение на инженерни оптимизационни задачи в дизайна използвайки невронни мрежи и прилагат намерения алгоритъм при дизайн на пружина на амортисьор, при дизайна на цилиндров блок, при дизайна на пет-степенна скоростна кутия с правоъгълно напречно сечение. В [5] са използвани невронни мрежи при оптималния дизайн на автомобилни брони. В [6] е изследвано използването на невронна мрежа за автоматизация и генериране на взаимовръзка между дизайнерски пособия, като графични таблети и таблици. В [8] авторите описват разгърнатата система в инженерния дизайн използвайки невронни мрежи.

Невронните мрежи често са обект на кратковременни смущения в определени моменти от време, поради които те претърпяват бързи изменения, които се моделират чрез импулси. Наличието на импулсни ефекти придават на системата смесено естество – непрекъснато и дискретно [4, 9]. В много инженерни приложения променливите, от които зависи дизайна са дисретни. Например механичните компоненти са налични само в определени стандартни размери. Типични примери за импулсни ефекти при решаване на оптимизационна задача от инженерен дизайн са структурни отговори, като: удар, естествена честота, и ефекти, включващи производствени параметри, мерки и др. Изменението на системата, породено от такива ефекти (т. нар. неявни ограничения на оптимизационната задача) се оценява чрез компютърни симулации или експерименти, които са най-скъпо струващата част от оптимизационният процес.

От друга страна при изучаването на редица процеси от съществено значение е зависимостта на състоянието на процеса от максимална стойност в предходен интервал от време. Например, в теорията на автоматичното управление на различни технически системи често законът на регулиране зависи от максималната стойност на някой от параметрите върху определени интервали от време [7]. Подобни проблеми се наблюдават и в много области на науката и технологиите.

Процеси, които се характеризират както със скокообразна смяна на тяхното състояние, така и с факта, че разглежданите процеси зависят от максимална стойност от тяхната предистория, могат да бъдат адекватно моделирани чрез импулсни диференциални уравнения със супремуми.

2. Предварителни бележки и дефиниции

Нека R^n е n- мерното Евклидово пространство и $\| x \| = \sum_{i=1}^{n} | x_i |$ е нормата на вектора $x \in R^n$. Нека $R_+ = [0, \infty)$, $R = (-\infty, +\infty)$, $t_0 \in R_+$ и $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots t_k < t_{k+1} < \ldots$, $\lim_{k \to \infty} t_k = \infty$.

Разглеждане следната импулсна невронна мрежа със супремуми в безкрайни интервали от време:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_i(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(x_j(t)) \\ + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \int_{-\infty}^{t} m_j(t,s) f_j(\sup_{s \in (-\infty, t]} x_j(s)) ds + I_i, \quad t \neq t_k, \\ x_i(t_k^+) = x_i(t_k) + P_{ik}(x_i(t_k)), \quad k = 1, 2, \ldots, \end{array} \right. \tag{2.1}$$

където $i = 1, 2, \ldots, n$, $x_i(t)$ е състоянието на i – тия елемент в момента от време t, $f_j(x_j(t))$ е активационната функция на j -тия елемент в момента t, константните матрици $A_{n \times n} = (a_{ij})_{n \times n}$ и $B_{n \times n} = (b_{ij})_{n \times n}$ характеризират силата на взаимодействие между елементите на невронната мрежа, $c_i > 0$ са константи, които характеризират нивото след което i – тия елемент ще постави своя потенциал в следващо състояние на изолация след като е изключен от мрежата и от външния източник в момента от време t, $I_i = const$ е външното откло-нение на i – тия елемент, ядрото $m_j(t,s) = m_j(t-s)$, $j = 1, 2, \ldots, n$ е от конволютивен тип, $x_i(t_k)$ е състоянието на i – тия елемент на невронната мрежа преди импулсно въздействие в момента от време t_k, $x_i(t_k^+)$ е състоянието на i – тия елемент след импулсно въздействие в момента от време t_k, P_{ik} са функции, които характеризират изменението на състоянието на i – тия елемент в момента от време t_k.

С помощта на модел от вида (2.1) могат да се изследват въпросите за оптимално управление и синхронизация на тези системи. Импулсите в случая играят ролята на контрол.

В последващия анализ ще използваме само такива начални функции, които принадлежат на класа от ограничени непрекъснати функции.

Нека $BC = BC[(-\infty, t_0], R^n]$ е клас от ограничени непрекъснати функции от $\left(-\infty, t_0\right]$ в R^n. Ако $x(t)$ е една $n-$мерна функция върху $(-\infty, t]$, дефинираме нормата $\left\|x(t)\right\|_\infty = \max_{s \in \left(-\infty, t\right]} \| x(s) \|$.

Нека $\varphi \in BC[(-\infty, t_0], R^n]$. Означаваме с $x(t) = x(t; t_0, \varphi)$ решението на (2.1), което удовлетворява началните условия

(2.2) $$\begin{cases} x_i(t; t_0, \varphi) = \varphi_i(t), \quad t \in (-\infty, t_0], \\ x_i(t_0 + 0; t_0, \varphi) = \varphi_i(t_0). \end{cases}$$

Константният вектор $x^* \in R^n$, $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)^T$ се нарича равновесно положение (равновесно решение) на система (2.1), ако удовлетворява равенствата

$$c_i x_i^* = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(x_j^*) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \int_{-\infty}^{t} m_j(t,s) f_j(x_j^*)\, ds + I_i,$$

$$P_{ik}(x_i^*) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Въвеждаме следните условия:

H1. Функциите $f_i(x_i)$ са ограничени в R, $i = 1, 2, \ldots, n$.

H2. Съществуват положителни константи L_i такива, че

$\left| f_i(u) - f_i(v) \right| \le L_i \left|u - v\right|$

за всички $u, v \in R$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

H3. Функцията $m_i : R^2 \to R_+$ е непрекъсната и съществуват положи-телни константи μ_i такива, че

$$\int_{-\infty}^{t} m_i(t,s)\, ds \le \mu_i < \infty$$

за $t \in R$, $t \ne t_k$, $k = 1, 2, \ldots$ и за $i = 1, 2, \ldots, n$.

H4. Функциите P_{ik} са непрекъснати в R, $i = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots$.

H5. $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots$ и $\lim_{k \to \infty} t_k = \infty$.

Ще използваме следната дефиниция за експоненциална устойчивост на равновесното положение $x^* = x(t; t_0, x^*)$ на система (2.1).

Нека $\varphi : \left(-\infty, t_0\right] \to R^n$, $t_0 \in R$ е непрекъсната начална функция и нека $x(t) = x(t; t_0, \varphi)$ е решенето на (2.1) при $t \ge t_0$, отговарящо на начални условия

$$x_i(t; t_0, \varphi) = \varphi_i(t), \quad t \in (-\infty, t_0], \qquad x_i(t_0 + 0; t_0, \varphi) = \varphi_i(t_0).$$

ДЕФИНИЦИЯ 2.1. Решението x^* се нарича *глобално експоненциално устойчиво*, ако

$$\left(\exists\ \lambda > 0\right) \ \left(\forall \varepsilon > 0\right) \ \left(\exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0\right) \ \left(\forall\ t_0 \in R : \left\|\varphi(t) - x^*\right\|_\infty < \delta\right) \Rightarrow$$

$$\| x(t) - x^* \| < \left\|\varphi(t) - x^*\right\|_\infty e^{-\lambda(t - t_0)}, \ t > t_0.$$

3. Основни резултати

В този параграф ще дадем достатъчни условия за глобална експоненциална устойчивост на равновесното решение x^* на система (2.1). При доказателството на тези теореми е използван директния метод на Ляпунов.

Въвеждаме класът V_0 от всички функции $V:[t_0,\infty)\times R^n \to R_+$, които са непрекъснати и локално Липшицови по втория си аргумент при $t \neq t_k, k=1,2,...$, съществуват и са крайни границите

$$\lim_{\substack{t\to t_k\\ t<t_k}} V(t,x)=V(t_k-0,x), \qquad \lim_{\substack{t\to t_k\\ t>t_k}} V(t,x)=V(t_k+0,x)$$

и е в сила равенството $V(t_k,x)=V(t_k-0,x)$ при всяко $k=1,2,...$

За $t\neq t_k, k=1,2,...$ и $V\in V_0$ дефинираме производната

$$D^+V(t,x(t))=\limsup_{\sigma\to 0^+}\frac{1}{\sigma}[V(t+\sigma,x(t+\sigma))-V(t,x(t))].$$

ТЕОРЕМА 3.1. Нека са изпълнени следните условия:

1. Изпълнени са условия H1-H5.
2. Параметрите на системата a_{ij}, b_{ij} и c_i $(i,j=1,2,...,n)$ удовлетворяват условието

$$\min_{1\le i\le n}\left(c_i-L_i\sum_{j=1}^n\left|a_{ji}\right|\right)>\max_{1\le i\le n}\left(L_i\mu_i\sum_{j=1}^n\left|b_{ji}\right|\right)>0.$$

3. За всяко $i=1,2,...,n$ и $k=1,2,...$

$$P_{ik}(x_i(t_k))=-\gamma_{ik}\left(x_i(t_k)-x_i^*\right), \qquad 0<\gamma_{ik}<2.$$

Тогава решението x^* на система (2.1) е глобално експоненциално устойчиво.

Доказателство.

Полагаме $y_i(t)=x_i(t)-x_i^*$, $i=1,2,...,n$. Тогава $y_i(t)$ удовлетворява следната система

$$(3.1)\qquad \begin{cases} \dot{y}_i(t)=-c_i(y_i(t)+x_i^*)+\sum_{j=1}^n a_{ij}f_j(x_j^*+y_j(t)) \\ +\sum_{j=1}^n b_{ij}\int_{-\infty}^t m_j(t,s)f_j(x_j^*+\sup_{s\in(-\infty,t]} y_j(s))\,ds+I_i, \quad t\neq t_k, \\ \Delta y_i(t_k)=Q_{ik}(y_i(t_k)), \end{cases}$$

където $Q_{ik}(y_i(t_k))=P_{ik}(y_i(t_k)+x_i^*)$, $i=1,2,...,n$, $k=1,2,....$

Дефинираме функцията на Ляпунов

$$V(t,y)=\sum_{i=1}^n|y_i(t)|.$$

За $t\ge t_0$ и $t=t_k$ от условие 3 на теорема 3.1 получаваме

(3.2) $$V(t_k^+, y(t_k)+\Delta y(t_k)) = \sum_{i=1}^{n} | y_i(t_k) + Q_{ik}(y_i(t_k)) |$$

$$= \sum_{i=1}^{n} | x_i(t_k) - x_i^* - \sigma_{ik}(x_i(t_k) - x_i^*) | = \sum_{i=1}^{n} | 1 - \sigma_{ik} | | x_i(t_k) - x_i^* |$$

$$< \sum_{i=1}^{n} | x_i(t_k) - x_i^* | = V(t_k, y(t_k)), \quad k = 1,2\dots .$$

Нека $t > t_0$ и $t \neq t_k$. Тогава за дясната производна $D^+V(t, y(t))$ на функцията $V(t, y(t))$ по траекториите на система (3.1) получаваме

$$D^+V(t,y(t)) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sgn}(y_i(t)) \dot{y}_i(t) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sgn}(y_i(t)) \Bigg[-c_i(y_i(t) + x_i^*) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(x_j^* + y_j(t))$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \int_{-\infty}^{t} m_j(t,s) f_j(x_j^* + \sup_{s\in(-\infty,t]} y_j(s)) ds + I_i \Bigg].$$

Тъй като са изпълнени условия H2 и H3, то

$$D^+V(t,y(t)) \le \sum_{i=1}^{n} \Bigg[-c_i | y_i(t) | + \sum_{j=1}^{n} L_j | a_{ij} | | y_j(t) |$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} L_j | b_{ij} | \int_{-\infty}^{t} m_j(t,s) \sup_{s\in(-\infty,t]} | y_j(s) | ds \Bigg]$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \Bigg[c_i - L_i \sum_{j=1}^{n} | a_{ji} | \Bigg] | y_i(t) | + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} L_j \mu_j | b_{ij} | \sup_{-\infty < s \le t} | y_j(s) |$$

$$\le -k_1 V(t, y(t)) + k_2 \sup_{-\infty < s \le t} V(s, y(s)),$$

където

$$k_1 = \min_{1\le i\le n} \left(c_i - L_i \sum_{j=1}^{n} | a_{ji} | \right) > 0, \quad k_2 = \max_{1\le i\le n} \left(L_i \mu_i \sum_{j=1}^{n} | b_{ji} | \right) > 0 .$$

От последната оценка за всяко решение $y(t)$ на (3.1), такова че

$$V(s, y(s)) \le V(t, y(t)), \ -\infty < s \le t,$$

имаме

$$D^+_{(4.84)} V(t, y(t)) \le -(k_1 - k_2) V(t, y(t)) .$$

От условие 2 на теорема 4.2.6 следва, че съществува реално число $\alpha > 0$, такова че $k_1 - k_2 \ge \alpha$, и следователно

(3.3) $$D^+V(t, y(t)) \le -\alpha V(t, y(t)), \quad t \ne t_k, \ t > t_0 .$$

Тогава от (3.3) и (3.2), получаваме

$$V(t, y(t)) \le e^{-\alpha(t-t_0)} V(t_0 + 0, y(t_0 + 0)), \quad t > t_0 .$$

Следователно

$$\sum_{i=1}^{n} | x_i(t) - x_i^* | \le e^{-\alpha(t-t_0)} \sum_{i=1}^{n} | x_i(t_0+0) - x_i^* | \le e^{-\alpha(t-t_0)}$$

$$\max_{s\in(-\infty, t_0]} \left(\sum_{i=1}^{n} | x_i(s) - x_i^* | \right), \quad t > t_0 .$$

Литература:

1.L.O.Chua and L. Yang, Cellular neural networks: Theory, IEEE Trans. Circuits Syst. CAS **35** (1988), 1257-1272.

2. L.O.Chua and L. Yang, Cellular neural networks: Applications, IEEE Trans. Circuits Syst. CAS **35** (1988), 1273-1290.

3. Y. Hsu, S. Wang and C. Yu, A sequential approximation method using neural networks for engineering design optimization problems, Engineering Optimization, **35** (2003), 489 - 511.

4. V. Lakshmikantham, D. D. Bainov and P. S. Simeonov, Theory of Impulsive Differential Equations, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, 1989.

5. J. Majak, M. Pohlak, R. Küttner, M. Eerme and K. Karjust, Artificial neural networks and genetic algorithms in engineering design, EngOpt 2008 - International Conference on Engineering Optimization, Rio de Janeiro, Brazil, 01 - 05 June 2008.

6. S. Malasri, J. Malasri, and K. Malasri, Automation of engineering design aids using neural networks, Proceedings of the MAESC 2005 Conference, (2005), 1-14.

7. E. P. Popov, Automatic Regulation and Control, Nauka, Moscow, 1966 (in Russian).

8. S. Smith, R. Escobedo, M. Anderson, and T. Caudell, A deployed engineering design retrieval system using neural networks, IEEE Trans. Neural Networks, **8** (1997), 847-851.

9. I.M. Stamova, Stability Analysis of Impulsive Functional Differential Equations, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2009.