



# MRW моделът на растежа: възникване, развитие и емпирични доказателства

Мария Нейчева\*

## 1. Въведение

Икономиката на растежа е една от най-популярните области на изследване в съвременния икономикс. Разработките в тази насока се базират на две фундаментални групи модели: неокласическите модели на растежа и моделите на ендогенния растеж (Romer 1986, Lucas 1988). Базовият неокласически модел на растежа произтича от агрегатната функция на Cobb-Douglas при предположение за два производствени фактора – първичен труд и капитал (Solow 1956, Swan 1956). С оглед неблагоприятните демографски процеси не толкова първичният трудов ресурс, колкото човешкият капитал и образованието се очаква да създават стимулираща растежа среда. Това, от своя страна, мотивира нарастващия интерес към изследванията относно влиянието на образованието върху икономиката и по-специално растежа.

В тази връзка статията се фокусира върху неокласическия модел на растежа с човешки капитал на Mankiw, Romer and Weil (1992), наричан MRW модел от тук нататък. Тя представя теоретичната обосновка, ключово последващо развитие и допълване, както и основни емпирични изводи от изследванията, оценяващи този модел. Структурата на работата е както следва: секция 2 представя математическо описание на MRW модела, а секция 3 – разглежда най-важните насоки в разширението му. Накрая (секция 4) са дадени заключителни бележки.

## 2. Теоретична рамка и математическо описание на MRW модела

Неокласическият модел на растежа, разработен от Solow-Swan, се базира на агрегатната производствена функция от вида Cobb-Douglas с два производствени фактора:

$$Y(t) = A * K(t)^\alpha * L(t)^{1-\alpha} \quad (1)$$

Използват се следните стандартни означения:  $Y$  е съвкупният продукт;  $K$  означава запаса от физически капитал;  $L$  е функцията на предлагане на труд, а  $A$  задава технологичното равнище;  $\alpha$  измерва еластичността на съвкупния продукт по отношение на физическия капитал. Предполага се постоянно равнище на технологиите, означено с  $A$ , предлагане на труд ( $L$ ), нарастващо с темп  $n$ , екзогенен темп на спестявания и съответно нарастване на запаса от физически капитал ( $s$ ) и постоянна норма на амортизация ( $\delta$ ). Mankiw, Romer и Weil (1992) разширяват модела чрез добавяне на човешкия капитал ( $H$ ) като трети самостоятелен ресурс. Така функцията на производството в условия на постоянна възвращаемост от мащаба добива следния вид:

$$Y(t) = A(t) * K(t)^\alpha * H(t)^\beta * L(t)^{1-\alpha-\beta} \quad (2)$$

За разлика от (1) тук е въведен запасът от човешки капитал ( $H$ ) и съответно  $\beta$  - еластичността на съвкупния продукт по отношение на този капитал<sup>1</sup>. Запазва се предположението за промяна на  $L$  и  $A$  с екзогенен темп, съответно  $n$  и  $g$ , както показва системата:

$$L(t) = L(0) * e^{nt} \quad (3a)$$

$$A(t) = A(0) * e^{gt} \quad (3b)$$

Замествайки (3) в производствената функция (2) и чрез съответни преобразувания, може да се изведе, че капиталовият ресурс в икономиката следва път на изменение, описван чрез:

\* доц. д-р Мария Нейчева  
Бургаски свободен университет

<sup>1</sup> Коефициентът на еластичност измерва очакваната процентна промяна в съвкупното производство при единица процентна промяна в количеството на съответния производствен фактор.



$$\dot{k}_t = s_k * y_t - (n + g + \delta) * k_t \quad (4a)$$

$$\dot{h}_t = s_h * y_t - (n + g + \delta) * h_t \quad (4b),$$

Малките букви –  $k = K/AL$ ,  $h = H/AL$  и  $y = Y/AL$  – означават съответната величина, изразена в ефективни единици труд.  $s_k$  и  $s_h$  са нормата на натрупване на физическия и на човешкия капитал, а темпът им на амортизиране е един и същ ( $\delta$ ). Наличието на намаляваща пределна възвращаемост на капитала предполага, че е в сила условието:  $\alpha + \beta < 1$ .

При тези начални условия капиталовият фактор се придвижва (конвергира) към дългосрочно равновесно равнище, зададено от системата (5):

$$k^* = \left( \frac{s_k^{1-\beta} * s_h^\beta}{n+g+\delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \quad (5a)$$

$$h^* = \left( \frac{s_k^\alpha * s_h^{1-\alpha}}{n+g+\delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \quad (5b)$$

Замествайки системата уравнения (5) в производствената функция (1) и чрез логаритмуване дохода на глава от населението ( $y$ ) може да се изрази по два начина: или като функция на инвестициите в човешки капитал  $s_h$  (6a), или като функция на запаса от човешки капитал  $h^*$  (6b), както е показано по-долу:

$$\ln y(t) = \ln A(0) + gt - \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta} \ln(n+g+\delta) + \frac{\alpha}{1-\alpha-\beta} \ln(s_k) + \frac{\beta}{1-\alpha-\beta} \ln(s_h) \quad (6a)$$

$$\ln y(t) = \ln A(0) + gt - \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln(n+g+\delta) + \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln(s_k) + \frac{\beta}{1-\alpha} \ln(h^*) \quad (6b)$$

Mankiw и др. (1992, с. 428) посочват, че формата на структурния модел, изграден върху системата (6), трябва да се определя от разполагаемите данни. Ако те отговарят точно на инвестиции в човешки капитал т.е. нормата на натрупване ( $s_h$ ), е удачно да се използва първото равенство. В противен случай, ако се използват данни за запаса ( $h^*$ ), регресионният модел трябва да наподобява (6b).

Краткосрочната динамика или пътя на конвергенция към равновесието се изразява чрез следната зависимост:

$$\ln(y_t) - \ln(y_0) = (1 - e^{-\lambda t}) \ln(y^*) - (1 - e^{-\lambda t}) \ln(y_0) \quad (7).$$

Тя показва, че темпът на промяна на дохода на единица е във функционална зависимост от равновесното си равнище ( $y^*$ ) и началното си състояние ( $y_0$ ). Използвайки равенството за равновесния доход, (7) се трансформира в:

$$\ln(y_t) - \ln(y_0) = (1 - e^{-\lambda t}) \frac{\alpha}{1-\alpha-\beta} \ln(s_k) + (1 - e^{-\lambda t}) \frac{\beta}{1-\alpha-\beta} \ln(s_h) - (1 - e^{-\lambda t}) \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta} \ln(n+g+\delta) - (1 - e^{-\lambda t}) \ln(y_0) \quad (8)$$

Параметърът  $\lambda$  в горните равенства измерва темпа на конвергенция към дългосрочното равновесие. Може да се изчисли, че ако дялът на всеки капиталов фактор е  $\alpha = \beta = 1/3$  и  $(n+g+\delta) = 0.06$ , стойността на  $\lambda$  е  $0.02^2$ , което означава, че за 35 години икономиката би се придвижила наполовина до равновесието. В класическия модел на Solow липсва човешки капитал т.е.  $\beta = 0$ , което, от своя страна, означава два пъти по-бърза конвергенция ( $\lambda = 0.04$ ).

Ключов извод от модел на Solow е, че основна предпоставка за растеж на съвкупния продукт и дохода е ръстът на населението. Наличието на постоянен темп на растеж на технологичното равнище ( $g$ ), както се предполага в (3b), също би детерминирало растеж на дохода. Все пак остава основният проблем с предположението за екзогенен технологичен прогрес без да се детерминират източниците му. Ако той е резултат от иновации, например, тогава иноваторите не могат да бъдат възнаградени, тъй като произведеният продукт ще се разпредели като плащане между труда и капитала.

Обогатяването на стандартния неокласически модел на растежа с човешки

<sup>2</sup> Това произтича от равенството за темпа на конвергенция  $\lambda = (n+g+\delta) * (1-\alpha-\beta)$ , като параметрите са въведени по-горе в това изложение.



капитал следва същата логика, но и решава част от проблемите и празнините. Отново липсва потенциал за дългосрочен растеж поради намаляващата пределна възвращаемост на капитала и технологичният растеж, ако е налице такъв, е с екзогенен характер. Но, по-бавният темп на конвергенция е в синхрон с реалните наблюдения. Включването на човешкия капитал увеличава и влиянието на нормата на спестяване ( $s_k$ ) върху дългосрочното равновесие, тъй като еластичността на дохода спрямо  $s_k$  е (вж.6):

$$\frac{1}{1-\alpha-\beta} > \frac{1}{1-\alpha}.$$

В емпиричните изследвания MRW моделът обикновено се решава чрез регресия с ограничения (restricted regression), която свързва брутният вътрешен продукт на човек от населението или единица работна сила с измерителите на производствените фактори. Нормата на промяна на физическия капиталов запас ( $s_k$ ) се измерва чрез дела общите или частните инвестиции в БВП. По отношение на натрупването на човешкия капитал ( $s_h$ ) обикновено се изчислява като усреднен процент на учениците в средното училище в трудоспособна възраст за дълъг период от време. Mankiw и др. използват периода 1960-1985 за изчисляване на  $s_h$  при зависима променлива БВП на глава от трудоспособното население през 1985 г. Сумата ( $g + \delta$ ) е 0.05 за всички страни. Алтернативно, запасът от човешки капитал в равновесие ( $h^*$ ) в (6b) е удачно да се апроксимира с дела на трудоспособното население с определено равнище на образование, например поне средно (Neucheva 2013, 2016), или среден брой години на обучение, достъпни чрез популярната база данни на Barro и Lee (Barro-Lee, 2013).

### 3. Основни насоки при допълване на MRW модела и емпирични доказателства

В качеството си на важен инструмент за изследване на растежа MRW моделът претърпява редица допълвания и разширения. Те могат да се групират в две категории: 1). модификации на структурата на модела и 2). използване на алтернативни подходи и методи за решаването му. Основната им цел е най-вече да се постигне по-добра степен на приближение

към реалните условия и обяснителна сила, тъй като коефициентът на детерминация ( $adj. R^2$ ) за напредналите икономики е не по-висок от едва 0.30. Следващите параграфи представят критичен обзор на тези разработки.

Между изследванията в първата група трябва да се отбележи значителният принос на Nonneman и Vanhoudt (1996), които обогатяват модела чрез явно въвеждане на технологично ноу-хау с ендегенен характер. В общия запис на функцията на съвкупното производство се разграничават  $m$  вида капитал като: инфраструктура, оборудване, друг физически капитал, ноу-хау и др. Технологичният прогрес в смисъл на схеми и разработки за производствения процес и нови продукти се счита за форма на капитала, включен като отделен ресурс.

Конкретният модел, който авторите оценяват, предполага три фактора за производството ( $m = 3$ ): физически капитал ( $k$ ), човешки капитал ( $h$ ) и технологично ноу-хау ( $\tau$ ). Последното се апроксимира чрез отношението между брутният вътрешен разходи за изследване и развитие (R&D) и брутният вътрешен продукт (БВП). По този начин обяснителната способност на регресията нараства повече от два пъти като  $adj. R^2$  скача от 0.220 в случая с човешки и физически капитал ( $m = 2$ ) до 0.732 за пълната спецификация ( $m = 3$ ). Това дава основание на авторите да твърдят, че техният модел обяснява 80% от вариацията на темпа на растеж между отделните страни в сравнение с едва 65% в оригиналния модел на Mankiw и др.

Приносът на Knowles и Owen (1995) е в отчитането на здравния статус, който, в съответствие с по-широкия възглед, е важен фактор за качеството на човешкия капитал. Използвайки продължителността на живот като мярка за запаса от здравен капитал, те успяват да постигнат степен на приспособяване на модела (goodness-of-fit) за извадката от високодоходни икономики от 0.71. Резултатите сочат, че здравният капитал е по-съществена детерминанта на растежа от образователния.

Както вече беше упоменато, втората насока в изследванията относно модела на Solow-Swan, обогатен с човешки капитал, е свързана с иконометричните методи на решаване и използваната метрика. Хипотезата,



че всички страни имат идентична производствена функция с еднакви параметри е твърде ограничаваща, поради което работата на *Islam* (1995) игнорира това допускане. Запазва се една и съща 5%та норма за сумата от технически прогрес и амортизация на физическия капитал, но, в същото време, се два възможност съвкупната производствена функция да варира по отношение на параметъра за промяна на производителността. Използвайки панелни данни моделът се решава за 5-годишни времеви интервали, като се постига подобрене на коефициент на детерминация от 0.85 за извадката с напреднали страни.

Подходът на *Islam* за решаване на MRW модела в случай на панелни данни широко се прилага от последващите разработки. Такъв е случаят с *Easterly u Levine* (2001), които въвеждат регионални дъми променливи за вариращите нива на производителност и технологичния параметър ( $A$ ). Разширявайки предмета на проучване, те се фокусират и ролята на икономическата политика. Образованието, степента на отвореност на икономиката, инфлацията, размера на държавния сектор се оказват силно корелирани с икономическия растеж.

*Lee, Pesaran u Smith* (1997) дават възможност страните да се различават по равнище, ръст и скорост на конвергенция, като така отговарят на реално наблюдаваните процеси. Те развиват стохастична версия на модел на *Solow*, като моделират хетерогенните параметри чрез случайни коефициенти и използват метода на максималната правдоподобност (maximum likelihood) за оценка. От своя страна, *Madala u Wu* (2000) прилагат итеративен Bayesian подход, за да решат проблема с хетерогенността. Те твърдят, че подобряват резултатите на *Lee* и др. (1997), чийто метод за решаване не е ефективен в случай на наличие на лагови променливи.

Трябва да се отбележи и приносът на *Durlauf u Johnson* (1995) за използване на регресионно дърво, което позволява да се идентифицират множество режими в данните и групират заедно страните, споделящи еднакъв статистически модел. Значим резултат постига и *Temple* (1998). Когато премахват Португалия и Турция от извадката за ОИСР, силата на приближение на регресията се свива от 0.35 до

0.02. Това насочва към извода, че моделът почти няма обяснителна сила за повечето от напредналите страни.

*Felipe u McCombie* (2005) предлагат алтернативно решение за подобряване на слабия резултат за извадката страни от ОИСР – премахване на ограничението за еднаква норма на технически прогрес за страните членки. Те изчисляват равнището на технология чрез дуалната форма на производствената функция от вида:

$$A(t) = B_0 w(t)^{1-\alpha} r(t)^\alpha \quad (9)$$

Оттук може да се изведе нормата на прогрес и да се отчете за отделната страна. В израза по-горе, с  $w_i$  е означен темпът на ръст на работните заплати,  $r_i$  е ръстът на печалбата, докато  $\alpha$  е делът на капитала в брутния доход. Така силата на приближение ( $R^2$ ) на структурния модел се увеличава до 0.85 за най-развитите икономики в глобален мащаб.

Влиятелното изследване на *Hanushek u Kimko* (2000) адресира друг важен проблем, свързан с измерването на човешкия капитал. Те посочват, че индикаторите за формално образование като норма на записване в основното и в средно образование е възможно да не представят акуратно нито запаса от човешки капитал, нито нарастването му в условия на промени от демографско естество или в образователната политика. Затова, независимо че не прилагат директно MRW модела, те решават регресионно уравнение, което свързва средногодишния темп на промяна на реалния БВП на глава с показател за качеството на работната сила, по-конкретно когнитивните умения на учащите се в средното училище, измерени чрез резултати от международно признати стандартизирани тестове. Добавянето на индикатор за качеството към количеството на човешкия капитал увеличава  $R^2$  повече от два пъти: на 0.73 от 0.33.

Както вече беше посочено, оценката на MRW модела става предимно чрез крос-секшън (cross-section) регресии. Недостатък на този метод е липсата на възможност да се очертаят различията и особеностите на процеса на икономически растеж между отделните страни. Няколко изследвания прилагат времеви (time series) анализ към отделно взета страна. За





Гърция *Tsamadias и Prontzas* (2012) обвързват брутната норма на записване в средното училище в дадена година с ръста на БВП в следващите две години. Все пак, проблемът на този тип спецификация е, че е необходимо да минат пове от две години, за да бъдат учениците напълно интегрирани на пазара на труда и икономиката.

Друг проблем, заслужаващ внимание, е, че MRW моделът не разграничава различните видове човешки капитал. Това би могло да създаде неточности при резултатите, ако производителността на отделните подгрупи човешки капитал, разграничени според придобитата образователна степен на работната сила, например, е различна – например според придобитата образователна степен. В отговор на това *Neucheva* (2016) разделя националния запас от човешки капитал, като диференцира инвестициите в средното от тези във висшето образование. Чрез регресия в редуцирана форма се сравнява ефектът на образователните равнища върху растежа в три икономики: България, Чехия и Естония. За първата е изведено или негативно, или статистически незначимо влияние, докато за Естония висшето образование се оказва в положителна зависимост с темпа на промяна на реалния доход на единица. Правдоподобно обяснение за получените значителни различия е наличието на по-големи вертикални несъответствия в квалификацията на пазара на труда за българската икономика.

#### 4. Заключение

Доминиращото изследване на Mankiw, Romer и Weil (1992) изгражда фундаментална рамка за оценка на източниците на дългосрочния растеж в съвременните пазарни икономики чрез експлицитно въвеждане на човешкия капитал като отделен фактор за производството в неокласическия модел на Solow-Swan. Като първи от този вид, MRW моделът продължава да се развива с цел увеличаване на степента на приближението му към реалните данни особено в случая за напредналите страни. Във връзка с това настоящото изследване цели да обобщи най-важните приноси по отношение на структурните и иконометрични модификации. Нещо повече, критичния преглед на

литературата позволява да се начертаят и насоки за бъдеща работа като: отчитане на влиянието на земята и природните ресурси за страните, чието развитие е зависимо от тях; дизагегиране на запаса от човешки капитал и последваща оценка на компонентите му; усъвършенстване на методите за оценка с цел осигуряване на задравина на иконометричния резултат.

#### References:

- Barro, R., J.-W. Lee, (2013) A New Data Set of Educational Attainment in the World, 1950-2010. *Journal of Development Economics*, vol 104, pp.184-198.
- Durlauf, S., P. Johnson, (1995) Multiple regimes and cross-country growth behavior. *Journal of applied econometrics*, vol. 10, p. 177-219.
- Easterly, W., R. Levine, (2001) It's not factor accumulation: stylized facts and growth models. *World Bank Economic Review*, vol. 15, p. 177-219.
- Felipe, J., J. L. McCombie, (2005) Why are some countries richer than others? A reassessment of Mankiw-Romer-Weil's tests of the neoclassical growth model. *Metroeconomica*, vol. 56, issue 3, p. 360-392.
- Hanushek, E., D. Kimko, (2000) Schooling, labor-force quality and the growth of nations. *The American Economic Review*, vol. 90, No. 5, p. 1184-1208.
- Islam, N., (1995) Growth Empirics: A Panel Data Approach. *The Quarterly Journal of Economics*, vol. 110, p. 1127-1170.
- Knowles, S., P. Owen, (1995) Health capital and cross-country variation in income per capita in the Mankiw-Romer-Weil model. *Economic Letters*, vol. 48, p. 99-106.
- Lee, K., H. Pesaran, R. Smith, (1997) Growth and convergence in a multi-country empirical stochastic Solow model. *Journal of Applied Econometrics*, vol. XII, p. 357-392.
- Lucas, R., (1988) On the Mechanism of Economic Development. *Journal of Monetary Economics*, vol. 22, p. 3-42.
- Maddala, G., S. Wu, (2000) Cross-country growth regressions: problems of heterogeneity and interpolation. *Applied Economics*, vol. 32, p. 635-642.
- Mankiw, G., D. Romer, D. Weil, (1992) A Contribution to the Empirics of Economic Growth. *Quarterly Journal of Economics*, vol. 107, p. 407-



437.

Neycheva, M., (2013) Does higher level of education of the labor force cause growth: evidence from Bulgaria. *Economic Change and Restructuring*, vol. 46, issue 3, p. 321-339.

Neycheva, M., (2016) Secondary versus Higher Education for Growth: the Case of Three Countries with Different Human Capital's Structure and Quality. *Quality and Quantity*, vol. 50, issue 6, p. 2367-2393.

Nonneman, W., P. Vanhoudt, (1996) A further Augmentation of the Solow Model and the Empirics of Economic Growth for OECD Countries. *The Quarterly Journal of Economics*, vol. 111, p. 943-953.

Romer, P., (1986) Increasing Returns and Long-run Growth. *The Journal of Political Economy*, vol. 94, p. 1002-1037.

Solow, R., (1956) A contribution to the theory of economic growth. *Quarterly Journal of Economics*, vol. 70, p. 65-94.

Swan, T. W., (1956) Economic Growth and Capital Accumulation. *The Economic Record*, vol. 32, p. 334-43.

Temple, J., (1998) Robustness tests of the augmented Solow model. *Journal of Applied Econometrics*, vol. 13, p. 361-375.

Tsmadias, C., P. Prontzas, (2012) The effect of Education on Economic Growth in Greece over the 1960-2000 Period. *Education Economics*, vol. 20, p. 522-537.