СИСТЕМАТИКА НА РАВНИННИ ЦИКЛОИДНИ ЗЪБНИ ПРЕДАВКИ

доц. д-р инж. Радостин Симеонов Долчинков
Бургаски свободен университет

SYSTEMATICS OF PLANAR CYCLOIDAL GEARS

Assoc. Prof. Eng. Radostin Dolchinkov, PhD
Burgas Free Universiti

Анотоция: *Цевно-епициклоидната и цевно-хипоциклоидната зъбни предавки са добре познати. Цевните колела от тези зъбни предавки имат съставна конструкция. За да се направи пълна систематика на епициклоидните и хипоциклоидните предавки с вътрешно зацепване е необходимо към групата на двете цевни предавки да се добави нова група зъбни предавки, получени на базата на цевните. При тези предавки профилът на зъба на епициклоидното, респ. на хипоциклоидното зъбно колело, се запазва, а цевното колело се замества с монолитно.*

Ключови думи*: Цевно-епициклоидна зъбна предавка, цевно-хипоциклоидна зъбна предавка*

Abstract: *Barrel-epicycloidal and Barrel-hypocycloidal gears are well familiar. The barrel wheels of these gears have a compound constitution. In order to make full systematics of the epicycloidal and hypocycloidal internal gears it is necessary to add a new group of gears based on the barrel gears. In these gears the profile of the epicycloidal tooth, respectively the hypocycloidal tooth, is preserved and the barrel wheel is replaced with a monolithic one.*

Key words*: Barrel-epicycloidal gears, Barrel-hypocycloidal gears*

Циклоидата предлага в сравнение с еволвентата едно особено широко поле от вариационни възможности. В цялото множество циклоиди лежат със сигурност още някои „зъбни форми", които не могат да поставят под въпрос мястото заемано от еволвентата, но са по-подходящи за решаването на определени задачи.

Зъбните форми на циклоидните зацепвания се образуват от циклични криви или техните еквидистанти.

Цикличните криви се образуват при отъркалването на един кръг (**въртящ се кръг**) по друг кръг (**основен кръг**), във един друг кръг или около друг кръг.

В резултат на тези движения се получават различни циклоиди [11]:

Епициклоида – крива, описана от една точка на въртящ се кръг, отъркалваща външно един основен кръг (фиг.1.а)

а – епициклоида *б – хипоциклоида* *в – перициклоида*

Фиг. 1. Видове циклоиди

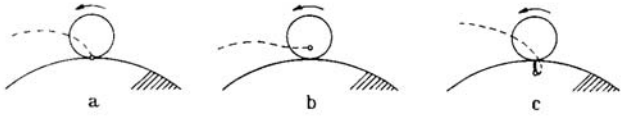
Хипоциклоида – крива, описана от една точка на въртящ се кръг, отъркалващ отвътре един неподвижен кръг (фиг. 1.б).

Перициклоида – крива, описана от една точка на въртящ се кръг, който външно отъркалва един основен кръг, като при това основния кръг лежи отвътре на въртящия се кръг (фиг.1.в).

Когато радиусът на основния или въртящият кръг клони към безкрайност се получават специални случаи на профилните форми на епициклоидата.

Ортоциклоида – крива, описана от една точка на въртящия кръг отъркалващ един основен кръг, при който радиусът му клони към (безкрайност) въртящият се кръг отъркалва една права.

Ако образуващата точка се намира върху обиколката на въртящият се кръг се получава **обикновена** или **нормална** циклоида. В литературата тази крива се среща с определенията: заострена, чиста или проста циклоида Фиг. 2.а. Намиращата се вътре във въртящият се кръг образуващата точка образува **скъсена циклоида** фиг.2.б. Ако образуващата точка се намира извън въртящият се кръг, се образува **удължена циклоида** фиг.2.в.

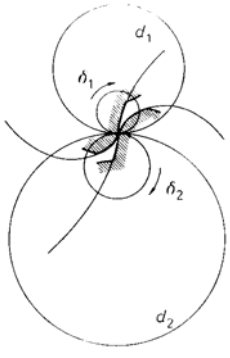


Фиг. 2. Циклоиди: а. Обикновена б. Скъсена с. Удължена

Скъсените и удължените циклоиди се наричат още трохоиди, вълнови или примкови циклоиди.

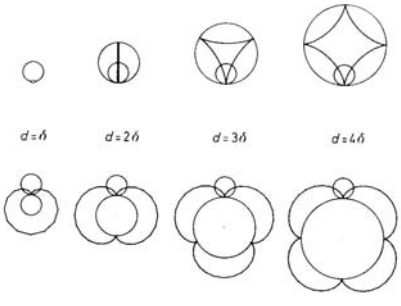
Възможно е скъсената циклоида да има примки, а удължената циклоида да възниква като вълнова циклоида, но винаги вида на линията дава точна информация за мястото на образуващата точка.

За формиране на зъбни профили и реализиране на зацепване е необходимо да се отъркалват две свободно избираеми ролкови окръжности δ_1 и δ_2 върху основните окръжности d_1 или d_2 (фиг.3). Лежащата вътре окръжност формира основата на зъба като част от хипоциклоида, а външната – главата като част от епициклоида. За предавката, двете основни окръжности са начални.



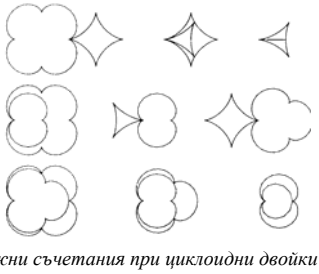
Фиг. 3. Формиране на циклоиден профил при циклоидно зацепване

Първото важно условие за да се осъществи зацепване е циклоидните криви да бъдат затворени, което се получава при положение, че отношението между диаметрите на основната и ролковата окръжност е цяло число (1, 2, 3, ...) – фиг.4. [3, 12, 13].



Фиг. 4. Зъбни форми получени от обикновени циклоиди

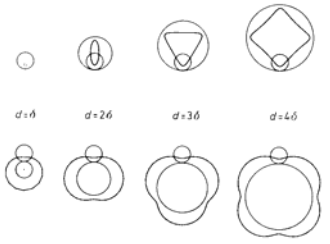
Затворените епи- или хипоциклоиди може да се използват за формиране на зъбни профили по цялата си дължина. Всяка циклоида може да се отъркалва (зацепва) в произволно съчетание (епи- с епи-, епи- с хипо-, хипо- с хипо-). Възможни са съчетания и на техните еквидистантни криви. Някой такива съчетания получени на основата на фиг.4. са представени на фиг.5.[11].



Фиг. 5. Възможни съчетания при циклоидни двойки (зацепвания)

Интерес за практиката представляват случаите, при които циклоидите са от един вид и броят на зъбите на двете колела е равен **($z_1=z_2$)** или е с разлика единица **($z_1-z_2=1$).**

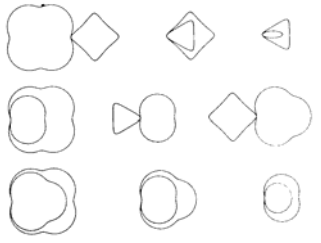
Други възможни форми се получават, когато произвеждащата точка лежи вътре в ролковата окръжност – скъсени циклоиди – фиг.6. [11].



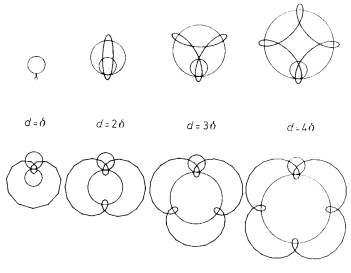
Фиг. 6. Зъбни профили получени от скъсени циклоиди

Възможни съчетания получени на основата на фиг.6. са показани на фиг.7.

Теоретически е възможно да се формират и профили на зъбите, за случаите когато производящата на точката на ролковата окръжност лежи извън нея – формира се удължена циклоида – фиг.8. [3, 11, 14], Тъй като кривите в този случай се получават преплетени, практическото приложение на зъбните профили е невъзможно.



Фиг. 7. Възможни съчетания на циклоидни двойки със скъсени циклоиди



Фиг. 8. Зъбни форми получени от удължени циклоиди

За случаите когато се наблюдава вътрешно отъркалване на началната и ролковата окръжност при съотношение d≈δ се получават циклоидни криви чиито еквидистанти съчетани с ролковата окръжност оформят четири вида предавки. Една от тези предавки е известна с името си **ЦИКЛО**-предавка. Тя се получава при съчетание на еквидистанта на скъсена перициклоида и ролкова окръжност – фиг. 9.

Другите три съчетания до този момент не са намерили приложение в предавки.

Фиг. 9. Съчетание на вътрешна еквидистанта и ролкова окръжност

Приложение в практиката са намерили така наречените „коригирани цикло-предавки" (КЦП) с вътрешно цевно-епициклоидно или цевно-хипоциклоидно зацепване и разлика между броя на зъбите на двете колела от предавката равна на единица. Рационалното използване на тези предавки е в следствие на коригирането им.

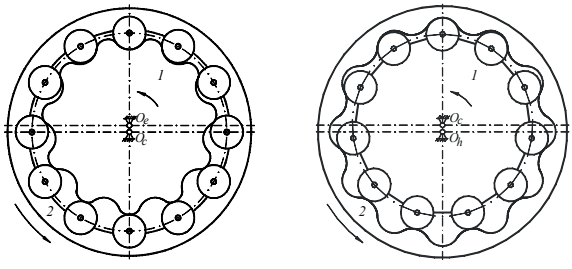
Коригираните цикло-предавки се използват в планетните редуктори тип K-H-V [15], в хидравлични помпи, високомоментни хидродвигатели и други.

Цевно-епициклоидната и цевно-хипоциклоидната зъбни предавки са добре познати. Първата се състои от епициклоидно зъбно колело с външни зъби и цевно колело с вътрешни „зъби". Втората се състои от хипоциклоидно зъбно колело с вътрешни зъби и цевно колело с външни „зъби". Цевните колела от тези зъбни предавки имат съставна конструкция.

Центровата крива на цевките на цевното колело *2* в равнината на епициклоидното колело *1* от цевно-епициклоидната предавка представлява скъсена епициклоида (фиг.10.а) с параметрични уравнения:

$$\begin{aligned} \xi_{1c}^{e}(\varphi) &= \frac{m}{2}\left((z_1^e+1)\sin\varphi-(1-x)\sin\left((z_1^e+1)\varphi\right)\right), \\ \eta_{1c}^{e}(\varphi) &= \frac{m}{2}\left((z_1^e+1)\cos\varphi-(1-x)\cos\left((z_1^e+1)\varphi\right)\right), \end{aligned} \qquad (1)$$

където m, z_1^e и x са съответно модул, брой на зъбите и коефициент на корекция на епициклоидното колело, а параметърът φ се изменя в интервала $\left[0,\pi/z_1^e\right]$.



а/ *б/*

Фиг. 10. Цевно - епициклоидна и цевно - хипоциклоидна предавки

Центровата крива на цевките на цевното колело *1* в равнината на хипоциклоидното колело *2* от цевно-хипоциклоидната предавка представлява скъсена хипоциклоида (фиг.10.б) с параметрични уравнения:

$$\begin{aligned}\xi^h_{2_c}(\varphi) &= \frac{m}{2}\left((z^h_2-1)\sin\varphi-(1-x)\sin\left((z^h_2-1)\varphi\right)\right),\\ \eta^h_{2_c}(\varphi) &= \frac{m}{2}\left((z^h_2-1)\cos\varphi+(1-x)\cos\left((z^h_2-1)\varphi\right)\right),\end{aligned} \qquad (2)$$

където m, z^h_2 и x са съответно модул, брой на зъбите и коефициент на корекция на хипоциклоидното колело, а параметърът φ се изменя в интервала $\left[0,\pi/z^h_2\right]$.

Уравненията на профила на зъба на епициклоидното колело, явяващ се еквидистантна крива на скъсената епициклоида (1), са:

$$\begin{aligned}\xi^e_1(\varphi) &= \xi^e_{1_c} + r_c\frac{(1-x)\sin\left((z^e_1+1)\varphi\right)-\sin\varphi}{\sqrt{1-2(1-x)\cos\left(z^e_1\varphi\right)+(1-x)^2}},\\ \eta^e_1(\varphi) &= \eta^e_{1_c} + r_c\frac{(1-x)\cos\left((z_e+1)\varphi\right)-\cos\varphi}{\sqrt{1-2(1-x)\cos\left(z^e_1\varphi\right)+(1-x)^2}},\end{aligned} \qquad (3)$$

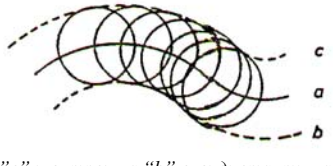
където $r_c = m r^*_c$ е радиус на формообразуващата окръжност (равен на радиуса на цевката), а r^*_c се нарича *коефициент на радиуса на формообразуващата окръжност*.

Уравненията на профила на зъба на хипоциклоидното колело, явяващ се еквидистантна крива на скъсената хипоциклоида (2), са:

$$\begin{aligned}\xi^h_2(\varphi) &= \xi^h_{2_c} + r_c\frac{(1-x)\sin\left((z^h_2-1)\varphi\right)+\sin\varphi}{\sqrt{1-2(1-x)\cos\left(z^h_2\varphi\right)+(1-x)^2}},\\ \eta^h_2(\varphi) &= \eta^h_{2_c} + r_c\frac{-(1-x)\cos\left((z^h_2-1)\varphi\right)+\cos\varphi}{\sqrt{1-2(1-x)\cos\left(z^h_2\varphi\right)+(1-x)^2}}.\end{aligned} \qquad (4)$$

За да се направи пълна систематика на епициклоидните и хипоциклоидните предавки с вътрешно зацепване е необходимо към групата на двете цевни предавки да се добави нова група зъбни предавки, получени на базата на цевните. При тези предавки профилът на зъба на епициклоидното, респ. на хипоциклоидното зъбно колело, се запазва, а цевното колело се замества с монолитно. Профилът на зъба на това колело се получава като външна или вътрешна обвиваща крива на последователните положения на профила на зъба на епициклоидното, респ. на хипоциклоидното зъбно колело, в равнината на цевното при отъркалването на центроидите на относително движение от изходните цевни предавки.

Ако центърът на един кръг се движи по циклоида “a”, то еквидистантите се образуват като външни “c” и вътрешни “b” обвиващи криви (фиг.11.).



Фиг. 11. Външна ”c” и вътрешна “b” еквидистанти на циклоидата “a”

Като **вътрешна еквидистанта** се определя обвиващата крива, която гледана от върха на циклоидата се намира по посока на центъра на основните точки.

Движи ли се една циклоида или една принадлежаща й еквидистанта в или около едно спрегнато колело, тя извършва едно транслационно и едно въртеливо движение, които отговарят на кинематична връзка. Контурът на циклоидата описва при това движение две обвиващи криви, които се наричат **енвелопи** (фиг.12.). Едната се намира навън от центъра на движението, а другата – навътре. Получените енвелопи се определят като **външни** или **вътрешни** обвиващи криви на циклоидите. Използват се като спрегнати профили на движението. Те представляват частично циклоиди и отчасти са криви от по-висок порядък.

Фиг. 12. Обвиващи криви получени от движението на циклоидно колело

В развитието на КЦП тези предавки са наречени „коригирани цикло-предавки с две линии на зацепване (**КЦП – 2Л3**) [5]. Към тях се отнасят:

- **профилно-епициклоидна зъбна предавка, състояща се от епициклоидно зъбно колело с външни зъби и профилно зъбно колело с вътрешни зъби- фиг. 13.а;**
- **епициклоидно-профилна зъбна предавка, състояща се от епициклоидно зъбно колело с външни зъби и профилно зъбно колело с вътрешни зъби;**
- **хипоциклоидно-профилна зъбна предавка, състояща се от хипоциклоидно зъбно колело с вътрешни зъби и профилно зъбно колело с външни зъби – фиг. 13.б;**
- **профилно-хипоциклоидна зъбна предавка, състояща се от хипоциклоидно зъбно колело с външни зъби и профилно зъбно колело с вътрешни зъби.**

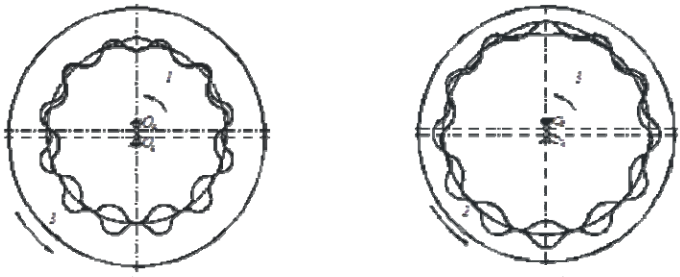
Основната разлика между тези предавки и предавките с цевно-епициклоидно и цевно-хипоциклоидно зацепване е, че цевното колело е заменено с монолитно профилно колело.

Наименованията и означенията на предавките се образуват по следния начин: Изписва се, че предавката е коригирана циклоидна, следва първи символ характеризиращ профила на колелото с вътрешни зъби и втори символ характеризиращ профила на колелото с външни зъби, след което в скоби се отбелязва с колко линии на зацепване е предавката.

Например: **КЦП-П-Е/2Л3/** – *Коригирана циклоидна предавка, съставена от профилно зъбно колело с вътрешни зъби, епициклоидно зъбно колело с външни зъби, с две линии на зацепване.*

Основните предимства на коригираните цикло-предавки с две линии на зацепване пред коригираните цикло-предавки с една линия на зацепване са следните:

- наличие на повече от една контактна точка между два зъба, намиращи се в зацепване, което води до намаляване на силите в зацепването;
- образуване на маслен клин между контактните точки на два, намиращи се в зацепване зъбни профила, което води до намаляване на триенето и износването и увеличаването на К.П.Д.;
- увеличаване на стабилността на предавката като цяло вследствие на замяната на един съставен елемент – цевното колело, с един монолитен елемент – профилното колело.



а/ *б/*

Фиг. 13. Коригирани цикло-предавки с две линии на зацепване

При образуването на циклопредавките с вътрешно зацепване от съществено значение е коя окръжност от епи-, хипоциклоидното или профилното колело ще се избере като негова центроида в предавката. Най-благоприятния случай е, ако тази центроида е началната окръжност, тъй като само в този случай зъбите в предавката са едновременно в зацепване.

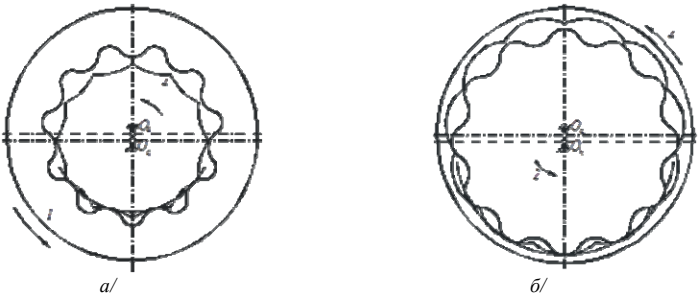
В циклопредавките едното колело което се явява като основно е с епи-, хипоциклоиден или сложен профил /циклоиден от по-висок порядък/. Профилът на зъбите на другото колело зависи от вида на кривата използвана като профил на зъбите на основното колело, избрания радиус на центроидата на основното колело и с какви зъби е основното колело – външни или вътрешни.

В предвид тези особености се предлага класификация на циклопредавките според вида на спрегнатите профили. В нея са включени циклопредавките с една и две линии на зацепване.

Според вида на основното колело циклопредавките се разделят на епициклоидни, хипоциклоидни и профилни.

За да се направи пълна систематизация на епициклоидните зъбни предавки е необходимо към класа на епициклоидните предавка да бъде добавена още една нова зъбна предавка [5], [6], получена на базата на цевно-епициклоидната. При тази предавка се запазва профилът на зъба на епициклоидното колело от изходната предавка, но епициклоидното колело е вече с вътрешни зъби. Профилът на зъба на монолитното зъбно колело с външни зъби, заменящо цевното, се получава като *вътрешна* обвиваща крива на профила на зъба на епициклоидното колело в равнината на цевното колело, при отъркалване на центроидите на относително движение на изходната цевно-епициклоидна предавка – фиг. 14.а.

Изграждането на пълна систематизация на хипоциклоидните зъбни предавки изисква към класа на цевно-хипоциклоидната предавка да бъде добавена още една нова зъбна предавка [7], [8], получена на базата на цевно-хипоциклоидната. Профилът на зъба на хипоциклоидното колело от изходната предавка при новата предавка се запазва, но хипоциклоидното колело е вече с външни зъби. Профилът на зъба на монолитното зъбно колело с вътрешни зъби, заменящо цевното, се получава като *външна* обвиваща крива на профила на зъба на хипоциклоидното колело в равнината на цевното колело, при отъркалване на центроидите на относително движение на изходната цевно-хипоциклоидна предавка – фиг. 14.б.

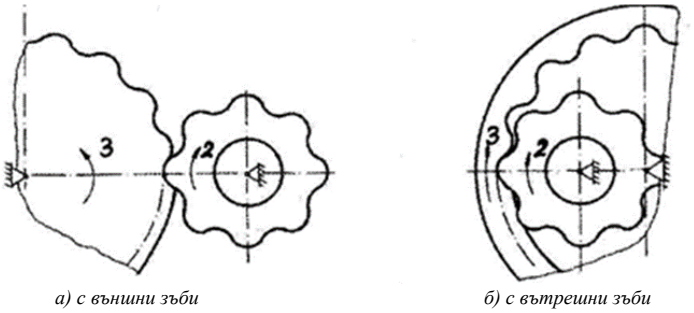


а/ *б/*

Фиг. 14. Коригирани цикло-предавки с една линии на зацепване

Поради изрязването на част от профила на зъба на колелото *4* от получените нови епициклоидна предавка *1-4* и хипоциклоидна предавка *4-2*, те се характеризират с неблагоприятни ъгли на предаване на движението и биха могла да се използва само като кинематични. Интересен в случая е фактът, че разликата в броя на зъбите е единица в полза на колелото с външни зъби.

За допълване на класификацията, на фиг.15.а е показана кинематична схема на профилни колела с външно зацепване, а на фиг.15.б е показана кинематична схема на профилни колела с вътрешно зацепване. Основното /изходното/ колело е профилно колело-3, с външни зъби и профил на зъбите циклоида от по-висок порядък, от Х-П предавка, фиг. 15.а. и профилно колело-3, с вътрешни зъби и профил на зъбите циклоида от по-висок порядък, от П-Е предавка, фиг. 15.б. Профилът на колелото 2 се определя като взаимообвиваща крива на последователните положения на колелото 3 и колелото 2 при тяхното зацепване [5].



а) с външни зъби *б) с вътрешни зъби*

Фиг. 15. Схеми на зацепване на профилни колела

Профилно колело с външни зъби от Х-П предавка, може да участва в зацепване с колело, чиито уравнения на профила са уравнения на профила на профилното колело от П-Е предавка, т.е. профилът на сдруженото колело е профилно колело.

Уравнението на профила на колелото участващо в зацепване с профилното колело с вътрешни зъби от П-Е предавка е уравнение на профилно колело при изходно епициклоидно колело.

Предавките се характеризират с неблагоприятни ъгли на предаване на движението, линията на зацепване е с малка дължина, а в контакт участва само една зъбна двойка. Поради това тези циклопредавки могат да се използват като кинематични или инструментални при обработването на профилните зъбни колела.

В циклопредавките 2Е и 2Х, [4] спрегнатите профили на зъбите са от един и същ вид, линията на зацепване е с малка дължина, а в контакт участва само една зъбна двойка, за която ъгълът на предаване на силата в определени моменти е 90^0. Поради това тези циклопредавки могат да се използват само като инструментални при обработването на епи- и хипоциклоидните колела.

КЛАСИФИКАЦИЯ НА РАВНИННИ ЦИКЛОИДНИ ЗЪБНИ ПРЕДАВКИ

1. ЕПИЦИКЛОИДНИ:
1.1. КЦП-Ц-Е/1ЛЗ/
1.2. КЦП-П-Е/2ЛЗ/
1.3. КЦП-Е-П/2ЛЗ/
1.4. КЦП-Е-П/1ЛЗ/
1.5. КЦП-2Е

2. ХИПОЦИКЛОИДНИ:
2.1. КЦП-Х-Ц/1ЛЗ/
2.2. КЦП-Х-П/2ЛЗ/
2.3. КЦП-П-Х/2ЛЗ/
2.4. КЦП-П-Х/1ЛЗ/
2.5. КЦП-2Х

3. ПРОФИЛНИ
3.1. КЦП-П[Х-П]-П[П-Е] /1ЛЗ/
3.2. КЦП-П[П-Е]-П[П-Е] /1ЛЗ/

Предложената класификация улеснява изучаването на циклопредавките с вътрешно зацепване и спомага за бързото разпознаване на зъбните колела, от които е съставена конкретната циклопредавка.

Литература:

1. Sumitomo, Machinery Corporation of America. Catalog 2001 – Speed Reducers and Gearmotors №04.301.50.08.
2. CYCLO-Getrieben, Lorenz Braren GmbH, Catalog.
3. Алипиев, О. Геометрия и формообразуване на епи- и хипо-циклоидни зъбни колела от коригирани цикло-предавки. *Автореферат към дисертация*, Русе, 1988 г., 36 с.

4. Алипиев, О. Класификация на циклопредавките с вътрешно зацепване според вида на спрегнатите профили, сп. Машиностроене кн.5, 1995
5. Долчинков, Р. Геометрия и формообразуване на профилни зъбни колела от коригирани цикло-предавки. *Автореферат на докторска дисертация*, Бургас, 2001 г., 41 с.
6. Nikolov, N., Dolchinkov, R., Galabov, V. Synthesis of Epy-cycloid Gears. *Proceedings of Jahorina – IRMES'2002 – International Scientific Conference „Research and Development of Mechanical Elements and Systems",* Srpsko Sarajevo, Republika Srpska, September 19-20, 2002, pp. 721-726.
7. Dolchinkov, R., Galabov, V., Nikolov, N. Research on the character of meshing in epicycloid gears. *Proceedings of Jahorina – IRMES'2002 – International Scientific Conference „Research and Development of Mechanical Elements and Systems",* Srpsko Sarajevo, Republika Srpska, September 19-20, 2002, pp. 727-732.
8. Dolchinkov, R., Galabov, V., Nikolov, N., Latinovic, V. Synthesis of Hipocycloidal Gears. *Proceedings of 2003 CCToMM Symposium on Mechanisms, Machines and Mechatronics, May 30, Quebec, Canada*.
9. Nikolov, N., Dolchinkov, R., Galabov, V., Latinovic, V. Meshing characteristics of Hipocycloidal Gears. *Proceedings of 2003 CCToMM Symposium on Mechanisms, Machines and Mechatronics, May 30, Quebec, Canada*.
10. Гълъбов, В, Долчинков, Р и др. Систематика и синтез на епициклоидни и хипоциклоидни зъбни предавки, XXXII Национален семинар по Динамика на механичните системи, Варна, 2006 г., стр. 91
11. Lehman M, Die Beschreibng der Zykloiden, ihrer Aquidistanten und Hullkurven, Munchen, 1981
12. Шанников В.М., Планетарные редукторы с внецентроидным зацеплением, Машгиз, 1948
13. Юдин В.А., Основы теории планетарно-цевочного редуктора с внутренним внеполюсным зацеплением, ТС по ТММ, выпуск 13, Изд. АС СССР, М., стр.42-78, 1948.
14. Lehmann M., Polarkoordinaten-Mesmaschine, „Feinwerktechnik - Messtechnik" 87, №5,1979
15. Кудрявцев В.Н., Планетарные передачи, М., Машиностроение, 1966

ЗА КОНТАКТИ:

Доц. д-р Радостин Симеонов Долчинков
Бургаски свободен университет
Тел.: 056/ 900-533
e-mail: rado@bfu.bg